



UNIVERSITÉ
ABDELMALEK ESSAÂDI
École nationale des sciences
appliquées
Al Hoceima



Module AP-12 : Analyse 1
CP 1ère année

Cours d'analyse Réelle

Said TAARABTI

Table des matières

1	Nombres réels	7
1.1	Introduction	7
1.1.1	Nombres rationnels	7
1.2	Nombres irrationnels	8
1.3	Le corps des nombres réels	9
1.4	Partie minorée, majorée, bornée	10
1.5	Borne supérieur, borne inférieure	11
1.6	Axiome de la borne supérieure (inférieure)	12
1.7	Caractérisation de la borne supérieure (inférieure)	12
1.8	Propriétés de la borne supérieure et de la borne inférieure	13
1.9	Valeur absolue	13
1.10	Partie entière	14
2	Suites numériques	15
2.1	Suites réelles : Définitions et Notations	15
2.2	Suite stationnaire, bornée, monotone	16
2.3	Nature d'une suite	17
2.3.1	Suites convergentes, divergentes	17
2.4	Suites extraites	18
2.5	Suites de Cauchy	19
2.6	Opérations sur les suites	20
2.7	Suites particulières	21
2.7.1	Suites arithmétiques	21
2.7.2	Suites géométriques	21
2.8	Suites adjacentes	22
2.9	Suites récurrentes	22
2.9.1	Suites (u_n) telles que $u_n = f(u_{n-1})$	22
2.10	Suites (u_n) telles que $u_n = au_{n-1} + bu_{n-2}$	22

3	Fonctions réelles. Limite et continuité	25
3.1	Fonction réelle d'une variable réelle	25
3.1.1	Définitions	25
3.2	Opérations sur les fonctions	26
3.3	Limite d'une fonction	27
3.3.1	Limite en un point	27
3.3.2	Limite en l'infini	29
3.3.3	Limite à gauche et à droite	30
3.3.4	Propriétés	31
3.4	Continuité d'une fonction	32
3.4.1	Continuité en un point	32
3.4.2	Propriétés	33
3.4.3	Prolongement par continuité	34
3.4.4	Suites et continuité	35
3.5	Continuité sur un intervalle	35
3.5.1	Le théorème des valeurs intermédiaires	35
3.6	Fonctions uniformément continues	39
3.7	Fonctions continues et suites de réels	40
4	Dérivabilité d'une fonction réelle	41
4.1	Fonctions dérivables	41
4.1.1	Définitions	41
4.1.2	Propriétés	42
4.1.3	Extremums et dérivabilités	44
4.2	Dérivées successives	45
4.3	Théorème de Rolle et accroissements finis	45
4.4	Formule de Taylor-Young	47
4.4.1	Développement de Taylor-Young d'une fonction	47
4.5	Dérivation et intégration de DTY	49
4.6	Développements limités	50
4.6.1	Notions sur les développements limités	50
4.7	Opérations sur les développements limités	51
4.8	Application des développements limités	53
4.8.1	Recherche de limites	53
4.8.2	Prolongement. Position locale par rapport à la tangente	53
4.8.3	Etude des branches infinies	54

5	Fonctions trigonométriques, hyperboliques et réciproques	55
5.1	Résultat général	55
5.2	Fonctions circulaires inverses	56
5.2.1	Arccosinus	56
5.2.2	Arcsinus	57
5.2.3	Arctangente	57
5.3	Fonctions hyperboliques et hyperboliques inverses	59
5.3.1	Cosinus hyperbolique et son inverse	59
5.3.2	Sinus hyperbolique et son inverse	59
5.3.3	Tangente hyperbolique et son inverse	60
5.3.4	Trigonométrie hyperbolique	61
6	Intégration de fonctions réelles	63
6.1	Introduction	63
6.2	L'intégrale de Riemann	65
6.2.1	Intégrale d'une fonction en escalier	65
6.2.2	Fonction intégrable	66
6.2.3	Premières propriétés	68
6.2.4	Les fonctions continues sont intégrables	68
6.2.5	Sommes de Riemann	69
6.3	Propriétés de l'intégrale	70
6.3.1	Relation de Chasles	70
6.3.2	Positivité de l'intégrale	70
6.3.3	Linéarité de l'intégrale	70
6.4	Primitive d'une fonction	71
6.4.1	Primitives des fonctions usuelles	72
6.4.2	Relation primitive-intégrale	72
6.5	Formules de la moyenne	73
6.5.1	Première formule de la moyenne	73
6.5.2	Deuxième formule de la moyenne	74
6.6	Primitives et intégrales	76
6.6.1	Intégrale indéfinie	76
6.7	Intégration par parties – Changement de variable	77
6.7.1	Intégration par parties	77
6.7.2	Changement de variable	77
6.8	Intégration des fractions rationnelles	78
6.9	Notions sur les intégrales généralisés	78
6.9.1	Points incertains	79

6.9.2	Convergence/divergence	80
6.9.3	Exemples	80
6.9.4	Relation de Chasles	81
6.9.5	Linéarité	82
6.9.6	Positivité	83
6.9.7	Cas de deux points incertains	83
6.10	Fonctions positives	85
6.10.1	Théorème de comparaison	85
6.10.2	Théorème des équivalents	86
6.10.3	Intégrales de Riemann	87
6.10.4	Intégrales de Bertrand	88
6.10.5	Application	88
6.11	Fonctions oscillantes	89
6.11.1	Intégrale absolument convergente	89
6.11.2	Intégrale semi-convergente	91
6.11.3	Théorème d'Abel	92

Chapitre 1

Nombres réels

1.1 Introduction

On suppose connues les propriétés de l'ensemble \mathbb{N} dit ensemble des entiers naturels ainsi que celles de l'ensemble \mathbb{Z} dit ensemble des entiers relatifs.

1.1.1 Nombres rationnels

Par définition, un nombre r est dit un nombre rationnel s'il existe deux nombres $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $r = \frac{p}{q}$. Ainsi l'ensemble des nombres rationnels \mathbb{Q} s'écrit

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

Parmi les nombres rationnels, on trouve les nombres décimaux qui sont des nombres de la forme $\frac{a}{10^n}$, où $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$.

Ainsi, on peut affirmer que :

Proposition 1 *Un nombre est rationnel si et seulement si il admet une écriture décimale périodique ou finie.*

Exemple 1

$$x = 0,25 \quad y = 0,333333\dots \quad z = 15,068214321432143\dots$$

sont des nombres rationnels. Cela se voit facilement pour les nombres x et y qui valent respectivement $x = \frac{1}{4}$ et $y = \frac{1}{3}$. Par contre, ce n'est pas le cas du nombre z .

Et donc, avant de terminer cette section, vérifions que $z = 15,068214321432143\dots$ est un rationnel.

L'idée de la démonstration repose sur la périodicité de l'écriture de z que nous allons multiplier par 10^3 (car la période pour le nombre z qu'on a considéré- commence 3 chiffres après la virgule). On a alors

$$10^3 z = 15068,214321432143\dots \quad (1.1)$$

Maintenant on va décaler tout vers la gauche de la longueur d'une période, c'est à dire que dans notre cas on multiplie par 10^4 pour décaler de 4 chiffres. On a donc

$$10^4 10^3 z = 150682143,21432143\dots \quad (1.2)$$

Les parties après la virgule des deux égalités (1.1) et (1.2) sont les mêmes, donc si on les soustrait en faisant (1.2)-(1.1) alors les parties décimales s'annulent et on obtient :

$$10^7 z - 10^3 z = 9999000z = 150667066.$$

Et donc

$$z = \frac{150667066}{9999000}$$

; ce qui prouve bien que

$$z \in \mathbb{Q}.$$

1.2 Nombres irrationnels

Nous avons vu précédemment que les nombres qui ont une écriture décimale périodique ou qui ont un nombre fini de chiffres après la virgule (donc ayant également une écriture décimale périodique mais avec des zéros!) sont des nombres rationnels. Qu'en est t'il alors des nombres tels que

$$\sqrt{2} = 1,41421356237\dots \quad \pi = 3,141592653589\dots \quad e = 2,718281828459\dots,$$

qui n'ont pas une écriture décimale périodique? De tels nombres sont dits irrationnels car ce ne sont pas des nombres rationnels comme on le peut vérifier pour le nombre $\sqrt{2}$.

Exercice 1 Montrez que le nombre réel $\sqrt{2}$ n'est pas un rationnel.

1.3 Le corps des nombres réels

On admet l'existence de l'ensemble \mathbb{R} dit ensemble des nombres réels. Muni des opérations $+$ et \times (l'opération \times est notée \cdot), l'ensemble \mathbb{R} est un corps commutatif, c'est à dire que l'ensemble \mathbb{R} vérifie les propriétés suivantes :

- $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, (a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c$ (associativité de la loi $+$)
- $\forall a, b \in \mathbb{R}, a + b = b + a$ (commutativité de la loi $+$)
- $\exists e \in \mathbb{R} (e = 0)$, tel que $a + e = a$ (0 élément neutre de $+$)
- $\forall a \in \mathbb{R}, \exists a' \in \mathbb{R} (a' = -a)$, tel que $a + a' = e$ ($-a$ symétrique ou encore opposé de a)
- $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c$ (associativité de la loi \cdot)
- $\forall a, b \in \mathbb{R}, a \cdot b = b \cdot a$ (commutativité de la loi \cdot)
- $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, (a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$ (distributivité de \cdot par rapport à $+$)
- $\exists e' \in \mathbb{R}^* (e' = 1)$, tel que $a \cdot e' = a$ (1 élément neutre de \cdot)
- $\forall a \in \mathbb{R}^*, \exists a^{-1} \in \mathbb{R}^* (a^{-1} = \frac{1}{a})$, tel que $a \cdot a^{-1} = e'$ (a^{-1} inverse de a)

De plus, en munissant \mathbb{R} de la relation d'ordre \leq , on peut vérifier que $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ est un corps commutatif totalement ordonné puisque

- $\forall a, b \in \mathbb{R}$, on a soit : $a \leq b$ ou $b \leq a$, (en particulier, on a $a \leq a, \forall a \in \mathbb{R}$)
- $\forall a, b \in \mathbb{R}$, on a : $a \leq b$ et $b \leq a \Leftrightarrow a = b$
- $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, on a : $a \leq b$ et $b \leq c \Rightarrow a \leq c$, (transitivité de \leq)

De plus, l'ordre induit par \leq est compatible avec l'addition $+$ possède la propriété de positivité supplémentaire, en effet

- $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$
- $\forall x, y \in \mathbb{R}, x \leq y \Rightarrow ax \leq ay, \quad \forall a \in \mathbb{R}^+$

Les propriétés précédentes -celles relatives à l'ordre \leq ainsi que celles qui font de l'ensemble \mathbb{R} un corps commutatif totalement ordonné- permettent d'obtenir les implications ou équivalences ci-après qui sont les règles de calcul sur \mathbb{R} en liaison avec l'ordre \leq . Nous détaillons cette liste sans démonstration.

- Soit $a \in \mathbb{R}$ alors : $a \geq 0 \Leftrightarrow -a \leq 0$
- Soient $a, b \in \mathbb{R}$ alors : $a \geq 0$ et $b \leq 0 \Rightarrow ab \leq 0$
- Soient $a, b \in \mathbb{R}$ alors : $a \leq 0$ et $b \leq 0 \Rightarrow ab \geq 0$
- Soient $a, b \in \mathbb{R}$ alors $a \geq b \Leftrightarrow a - b \geq 0$
- Soit $b \in \mathbb{R}^+$, alors $a - b \leq a \leq a + b$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.
- Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$, alors $a > b$ et $c > 0 \Rightarrow ac > bc$
- Soit $a \in \mathbb{R}$, alors $a > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} > 0$
- Soient $a, b \in \mathbb{R}$, alors $0 < a < b \Rightarrow 0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$

- Soient $a, b \in \mathbb{R}$, alors $a \geq 0$ et $b \geq 1 \Rightarrow ab \geq a$
- Soient $a, b \in \mathbb{R}$, alors $a \geq 0$ et $0 \leq b \leq 1 \Rightarrow 0 \leq ab \leq a$
- Soient $a, b \in \mathbb{R}$, alors $a \geq b \Leftrightarrow -a \leq -b$
- Soient $a, b \in \mathbb{R}^+$, $a^2 \leq b^2 \Leftrightarrow a \leq b$
- Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $(0 < a \leq b)$ et $(0 < c \leq d) \Rightarrow (0 < ac \leq bd)$ et $(0 < \frac{a}{d} < \frac{b}{c})$

Proposition 2 (*Propriété d'archimède*)

$$\forall a > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}^*; \quad x \leq na.$$

Proposition 3 \mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R} : tout intervalle $]a, b[$ non-vide de \mathbb{R} contient au moins un rationnel.

Preuve 1 Puisque $b - a > 0$, la propriété d'Archimède permet d'armer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > 1/(b - a)$. Posons alors $m = E(na)$: on a $m \leq na < m + 1$, donc

$$\frac{m}{n} \leq a < \frac{m+1}{n} \leq \frac{m}{n+1} < a + (b - a) = b.$$

Le nombre rationnel $\frac{m+1}{n}$ appartient donc à $]a, b[$.

1.4 Partie minorée, majorée, bornée

Dans toutes cette section, A désigne une partie non vide de \mathbb{R} .

Définition 1 Soient $M, m \in \mathbb{R}$. On dit que :

- $M \in \mathbb{R}$ est une majorant de A si $\forall x \in A, x \leq M$. On dit alors que A est majorée.
- $m \in \mathbb{R}$ est un minorant de A si $\forall x \in A, x \geq m$. on dit que A est minorée.
- A est bornée si A est à la fois minorée et majorée.

Dans la suite, nous devons tenir compte des remarques et propriétés suivantes :

- Un majorant ou un minorant d'une partie A n'est pas forcément un élément de A .

- S'il existe un majorant M de A qui appartient à A , alors M est unique. Cet élément est appelé plus grand élément de A et on note $M = \max(A)$. Ainsi

$$M = \max(A) \Leftrightarrow M \in A \quad \text{et} \quad M \quad \text{est un majorant de} \quad A.$$

- S'il existe un minorant m de A qui appartient à A , alors m est unique. Cet élément est appelé plus petit élément de A et on note $M = \min(A)$. Ainsi

$$m = \min(A) \Leftrightarrow m \in A \quad \text{et} \quad m \quad \text{est un minorant de} \quad A.$$

Exemple 2 1. Les intervalles $I =]-1, 2[$ et $J = [-1, 2]$ sont bornés car ils sont majorés par 2 et minorés par -1 . De plus, $\min(J) = -1$ et $\max(J) = 2$ par contre $\min(I)$ et $\max(I)$ n'existent pas.

2. $A = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{Z}\}$ est majorée par 1 et minorée par -1 .

3. L'ensemble des entiers naturels \mathbb{N} est minoré par 0 mais n'est pas majoré.

4. Les ensembles \mathbb{Z}, \mathbb{Q} et \mathbb{R} ne sont ni minorés ni majorés.

1.5 Borne supérieur, borne inférieure

Définition 2 Soient S l'ensemble des majorants de A et I l'ensemble des minorants de A .

- Le plus petit élément de S , s'il existe, est appelé borne supérieur de A .

Cet élément est noté $\sup(A)$.

- Le plus grand élément de I , s'il existe, est appelé borne inférieur de A .

Cet élément est noté $\inf(A)$.

Concernant ces deux notions de borne supérieur et borne inférieure, nous devons remarquer que :

- La borne supérieure de A s'elle existe est unique et c'est le plus petit des majorants de A .
- Si A admet un plus grand élément, alors cet élément est la borne supérieure de A .

- La borne inférieure de A si elle existe est unique et c'est le plus grand des minorants de A .
- Si A admet un plus petit élément, alors cet élément est la borne inférieure de A .

Exemple 3 1. Soit $A = \{1 + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{Z}\}$, alors $\max(A) = \sup(A) = 2$ et $\min(A) = \inf(A) = 0$.

2. Soit $B = \{x \in \mathbb{Q}, x^2 < 2\}$, alors on vérifie que $\sup(B) = \sqrt{2} \notin B$.

1.6 Axiome de la borne supérieure (inférieure)

Proposition 4 1. Toute partie non vide majorée de \mathbb{R} admet une borne supérieure dans \mathbb{R} .

2. Toute partie non vide minorée de \mathbb{R} admet une borne inférieure dans \mathbb{R} .

Remarque 1 La borne supérieure ou inférieure d'une partie A de \mathbb{R} quand elle existe n'appartient pas toujours à A et on a

$$M = \sup(A) \in A \Leftrightarrow M \text{ est le plus grand élément de } A.$$

$$m = \inf(A) \in A \Leftrightarrow m \text{ est le plus petit élément de } A.$$

1.7 Caractérisation de la borne supérieure (inférieure)

Caractérisation suivante de la borne supérieure est souvent utilisée.

Théorème 1 Soit A une partie non vide de \mathbb{R} ,

— si A admet une borne supérieure alors

$$M = \sup(A) \Leftrightarrow (\forall a \in A, a \leq M) \text{ et}$$

$$(\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, M - \varepsilon < x \leq M).$$

— si A admet une borne inférieure alors

$$m = \inf(A) \Leftrightarrow (\forall a \in A, a \geq m) \text{ et}$$

$$(\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, m \leq x < m + \varepsilon).$$

En tenant compte des résultats précédents, nous pouvons vérifier que :

- $\sup(A) = \max(A) \Leftrightarrow A$ est majorée et $\max(A)$ existe.
- $\inf(A) = \min(A) \Leftrightarrow A$ est minorée et $\min(A)$ existe.
- $\forall a, b \in \mathbb{R}$, et $a \leq b$, $\sup([a, b]) = \sup(]a, b]) = \sup([a, b[) = \sup(]a, b[) = \sup(]-\infty, b]) = \sup(]-\infty, b[) = b$.
- $\forall a, b \in \mathbb{R}$, et $a \leq b$, $\inf([a, b]) = \inf(]a, b]) = \inf([a, b[) = \inf(]a, b[) = \inf([a, +\infty[) = \inf(]a, +\infty[) = a$.

1.8 Propriétés de la borne supérieure et de la borne inférieure

Proposition 5 Soient A, B deux parties non vides de \mathbb{R} tels que $A \subset B$.

- Si B est majorée alors A est majorée et $\sup(A) \leq \sup(B)$.
- Si B est minorée alors A est minorée et $\inf(B) \leq \inf(A)$.

Définition 3 Soient A et B deux parties non vides de \mathbb{R} , on définit les ensembles $-A$ et $A + B$ respectivement par

$$-A = \{-a, a \in A\} \quad \text{et} \quad A + B = \{a + b, \quad a \in A \quad \text{et} \quad b \in B\}.$$

Proposition 6 Soient A, B deux parties non vides de \mathbb{R} ,

1. Si A est majorée alors $-A$ est minorée et on a $\inf(-A) = -\sup(A)$.
2. Si A est minorée alors $-A$ est majorée et on a $\sup(-A) = -\inf(A)$.
3. Si A et B sont majorées alors $A + B$ est majorée et on a $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.
4. Si A et B sont minorées alors $A + B$ est minorée et on a $\inf(A + B) = \inf(A) + \inf(B)$.

1.9 Valeur absolue

Définition 4 Soit x un nombre réel, on appelle valeur absolue de x qu'on note $|x|$ le réel défini par :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.3)$$

Parmi les propriétés vérifiées pour la valeur absolue, on a : Pour tout réel x , $|x| = \max(x, -x)$ où

$$\max(x, y) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq y \\ y & \text{si } x \leq y \end{cases} \quad (1.4)$$

- Proposition 7**
1. $\forall x, y \in \mathbb{R}, |x + y| \leq |x| + |y|$. (*inégalité triangulaire*)
 2. $\forall x, y \in \mathbb{R}, |x| - |y| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$. (*double inégalité triangulaire*)
 3. $\forall x, y \in \mathbb{R}, ||x| - |y|| \leq |x - y|$.
 4. $\forall x, y \in \mathbb{R}, |x + y| = |x| + |y| \Leftrightarrow xy \geq 0 \Leftrightarrow x \text{ et } y \text{ ont le même signe}$.

1.10 Partie entière

Théorème 2 *Pour tout réel x , il existe un unique entier relatif n tel que $n \leq x < n + 1$.*

Cet entier est noté $E(x)$ et est appelé partie entière de x .

Les propriétés ci dessous peuvent être établies sans grand effort, elles sont données sans démonstration.

- Le nombre $E(x)$ est le plus grand nombre entier inférieur ou égal à x .
- $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$E(x) \leq x < E(x) + 1$$

$$x - 1 < E(x) \leq x$$

- $E(x + m) = E(x) + m, \forall x \in \mathbb{R}, \forall m \in \mathbb{Z}$.
- $E(-x) = -E(x) - 1, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

Chapitre 2

Suites numériques

2.1 Suites réelles : Définitions et Notations

Définition 5 *une suite numérique, dite aussi suite réelle, une application u d'une partie I de \mathbb{N} dans \mathbb{R} .*

Ainsi, une suite réelle, notée $u = (u_n)_{n \in I}$, est une application

$$u : I \subset \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} \quad (2.1)$$

$$n \longrightarrow u_n \quad (2.2)$$

On pose $u(n) = u_n$ et on appelle u_n terme générale (ou le terme de rang n) de la suite $(u_n)_n$.

Remarque 1 — *Une suite $(u_n)_n$ peut être définie par l'expression de son terme général u_n en fonction de n .*

— *Une suite peut également être définie par la valeur du premier terme et par une relation de récurrence, c'est-à-dire une relation liant deux termes généraux successifs. On dit alors que c'est une suite récurrente.*

Exemple 4 — *$(\sqrt{n})_{n \geq 0}$ est la suite de termes : $0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots$*

— *$((-1)^n)_{n \geq 0}$ est la suite qui alterne $+1, -1, +1, -1, \dots$*

— *$(F_n)_{n \geq 0}$ définie par $F_0 = 1, F_1 = 1$ et la relation $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pour $n \in \mathbb{N}$ (suite de Fibonacci). Les premiers termes sont $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$ Chaque terme est la somme des deux précédents.*

— *$(\frac{1}{n^2})_{n \geq 1}$. Les premiers termes sont $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \dots$*

2.2 Suite stationnaire, bornée, monotone

Définition 6 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est stationnaire s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $u_n = u_{n_0}, \forall n \geq n_0$.
En particulier, une suite constante ($u_n = u_0, \forall n \geq n_0$) est une suite stationnaire.
- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est périodique de période p ($p \in \mathbb{N}^*$) si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+p} = u_n$ et p est le plus petit entier positif vérifiant cette propriété. L'entier p est alors appelé période de la suite (u_n) qui est dite suite p -périodique.
- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée si $\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq M$.
- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée si $\exists m \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq m$.
- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée si elle est majorée et minorée, ce qui revient à dire :

$$\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n| \leq M.$$

Remarque 2 Une suite (u_n) est bornée si et seulement s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que :

$$|u_n| \leq M, \quad n \in \mathbb{N}$$

Exemple 5 — La suite $(\frac{n-1}{n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée.

- La suite $(n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée.

Définition 7 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite.

- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante si $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} \geq u_n$.
- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante si $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} > u_n$.
- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante si $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} \leq u_n$.
- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante si $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} < u_n$.
- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone si elle est croissante ou décroissante.
- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement monotone si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

Remarque 3 Il arrive qu'une propriété ne soit pas vraie pour tous les premiers termes d'une suite mais seulement à partir d'un certain rang. Par exemple, (u_n) est croissante à partir d'un certain rang s'il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ on a $u_{n+1} \geq u_n$.

Exemple 6 1. La suite $(\frac{1}{n^2})$ est strictement décroissante.

2. La suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par $u_n = (-1)^n/n$ pour $n \geq 1$, n'est ni croissante ni décroissante. Elle est majorée par $1/2$ (borne atteinte en $n = 2$), minorée par -1 (borne atteinte en $n = 1$).

3. La suite $(\frac{1}{n})_{n \geq 1}$ est une suite strictement décroissante. Elle est majorée par 1 (borne atteinte pour $n = 1$), elle est minorée par 0 mais cette valeur n'est jamais atteinte.

2.3 Nature d'une suite

2.3.1 Suites convergentes, divergentes

Définition 8 On dit que la suite (u_n) est convergente et de limite l , lorsque $n \rightarrow +\infty$, si pour n assez grand u_n appartient à tout voisinage donnée de l , i.e.,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \quad \text{tel que } , |u_n - l| < \varepsilon.$$

On écrit alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$

Exemple 7 La suite (u_n) dont le terme général est définie par $u_n = \frac{1}{n}$, où $n \geq 1$ converge vers 0.

Définition 9 1. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ si :

$$\forall A > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geq N \implies u_n \geq A)$$

2. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$ si :

$$\forall A > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geq N \implies u_n \leq -A)$$

Définition 10 On dit qu'une suite (u_n) diverge si elle ne converge pas, c'est à dire si elle n'admet pas de limite finie dans \mathbb{R} .

Proposition 8 Si une suite est convergente, sa limite est unique.

Preuve 2 On procède par l'absurde. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente ayant deux limites $l \neq l'$. Choisissons $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon < \frac{|l-l'|}{2}$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$, il existe N_1 tel que $n \geq N_1$ implique $|u_n - l| < \varepsilon$.

De même $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l'$, il existe N_2 tel que $n \geq N_2$ implique $|u_n - l'| < \varepsilon$.

Notons $N = \max(N_1, N_2)$, on a alors pour ce N :

$$|u_N - l| < \varepsilon \quad \text{et} \quad |u_N - l'| < \varepsilon$$

Donc $|\ell - \ell'| = |\ell - u_N + u_N - \ell'| \leq |\ell - u_N| + |u_N - \ell'|$ d'après l'inégalité triangulaire. On en tire $|\ell - \ell'| \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon < |\ell - \ell'|$. On vient d'aboutir à l'inégalité $|\ell - \ell'| < |\ell - \ell'|$ qui est impossible.

Bilan : notre hypothèse de départ est fautive et donc $\ell = \ell'$.

Proposition 9 Si une suite (u_n) réelle convergente, alors elle est bornée.

Preuve 3 Si la suite $(u_n)_n$ converge vers l , on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N$ tel que $\forall n \geq N, |u_n - l| < \varepsilon$.

Comme $u_n = u_n - l + l \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N$ tel que $\forall n \geq N, |u_n| \leq |u_n - l| + |l|$ donc $\forall n > N \quad |u_n| \leq \varepsilon + |l|$.

Soit $M = \sup(|u_1|, |u_2|, \dots, |u_N|, \varepsilon + |l|)$.

On a $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| < M$ i.e, la suite (u_n) est bornée

Remarque 4 La réciproque de la proposition précédente est fautive. En effet, la suite définie par $u_n = (-1)^n$ est bornée et pourtant elle est divergente

Proposition 10 Si (u_n) est une suite bornée et si (v_n) est une suite qui converge vers 0, alors la suite $(u_n v_n)$ converge vers 0.

2.4 Suites extraites

Définition 11 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite. On appelle suite extraite (ou sous suite) de la suite u toute suite v dont le terme général peut s'écrire $v_n = u_{\phi(n)}$, où ϕ est une application strictement croissante de \mathbb{N} dans lui-même.

Exemple 8 1. Prenons la suite définie par $u_n = (-1)^n$.

L'application $\phi(n) = 2n$ donne la sous-suite $v_n = u_{2n} = (-1)^{2n} = 1$ (suite constante).

2. Si $u_n = \sin\left(\frac{2\pi n}{17}\right)$. Elle est périodique de période 17.

L'application $\phi : n \rightarrow 17n$ donne la sous-suite $v_n = u_{17n} = \sin 2\pi n = 0$

Proposition 11 Une suite (u_n) est convergente de limite l si et seulement si toute sous extraite de (u_n) est convergente de limite l .

Les deux remarques suivantes sont particulièrement importantes.

Remarque 5 1. Une suite (u_n) peut ne pas avoir de limite alors que certaines de ces suites extraites peuvent en avoir.

2. Si deux suites extraites d'une même suite (u_n) ont des limites différentes, alors la suite (u_n) n'a pas de limite.

Proposition 12 — Toute suite croissante majorée est convergente de limite $l = \sup \{u_n; n \in \mathbb{N}\}$.

— Toute suite décroissante minorée est convergente de limite $l = \inf \{u_n; n \in \mathbb{N}\}$.

— Toute suite croissante non majorée est divergente de limite $+\infty$.

— Toute suite décroissante non minorée est divergente de limite $-\infty$.

2.5 Suites de Cauchy

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

Définition 12 La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite suite de Cauchy si elle vérifie :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \text{ tel que } \forall n > N, \forall m > N, \quad |u_m - u_n| < \varepsilon.$$

Remarque 6 Il est facile de vérifier que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \text{ tel que } \forall n > N, \forall p > 0, \quad |u_{n+p} - u_n| < \varepsilon.$$

Théorème 3 Une suite réelle est convergente dans \mathbb{R} est une suite de Cauchy dans \mathbb{R} .

Preuve 4 Si (u_n) est une suite réelle convergente vers l dans \mathbb{R} , alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \forall n > N, \quad |u_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \forall n \geq N, \forall m \geq N : |u_m - u_n| \leq |u_n - l| + |u_m - l| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

La réciproque du théorème précédent est vraie.

Théorème 4 Toute suite de Cauchy dans \mathbb{R} est convergente dans \mathbb{R} .

Exemple 9 La suite (u_n) définie par : $u_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2}$ est de Cauchy et donc elle est convergente.

2.6 Opérations sur les suites

Soient (u_n) et (v_n) deux suites admettant comme limites respectives l et l' .

Proposition 13 (*Suite somme*)

La suite somme (w_n) , dont le terme général est définie par $w_n = u_n + v_n$, a pour limite $l + l'$.

Proposition 14 (*Suite produit*)

La suite produit (p_n) dont le terme général est définie par $p_n = u_n v_n$, a pour limite ll' .

Proposition 15 Si (u_n) est une suite bornée et (v_n) est une suite qui converge vers 0, alors la suite produit $(u_n v_n)$ converge vers 0.

Proposition 16 (*Suite inverse*)

Soit (u_n) une suite de limite l (l non nul) et vérifiant $u_n \neq 0, \forall n$. Alors la suite inverse $(\frac{1}{u_n})$ a pour limite $\frac{1}{l}$.

Proposition 17 Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles vérifiant $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang n_0 et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l'$ alors $l \leq l'$.

Théorème 5 (*Théorème des gendarmes*)

Soient $(u_n), (v_n)$ deux suites convergentes de même limite $l \in \mathbb{R}$ et (w_n) une suite vérifiant $u_n \leq w_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang n_0 , alors (w_n) est convergente de limite l .

Les résultats précédents permettent de vérifier que :

- Si $(u_n), (v_n)$ sont deux suites réelles vérifiant $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ et $v_n \geq u_n$ à partir d'un certain rang n_0 , alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.
- Si $(u_n), (v_n)$ sont deux suites réelles vérifiant $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ et $v_n \leq u_n$ à partir d'un certain rang n_0 , alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$.

Remarque 7 1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$. Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \geq 0$.

2. Attention, si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite convergente telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$, on ne peut affirmer que la limite est strictement positive mais seulement que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \geq 0$. Par exemple la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ donnée par $u_n = \frac{1}{n+1}$ est à termes strictement positifs, mais converge vers zéro.

2.7 Suites particulières

Soit (u_n) une suite réelle.

2.7.1 Suites arithmétiques

Définition 13 La suite (u_n) est dite arithmétique de raison r si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r$.

Proposition 18 Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r , alors

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_m + (n - m)r.$$

En particulier : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 + nr$.

Proposition 19 Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r , alors la somme des $(n + 1)$ premiers termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donnée par :

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = \sum_{k=0}^n u_k = (n + 1)u_0 + \frac{n(n + 1)}{2}r.$$

2.7.2 Suites géométriques

Définition 14 La suite (u_n) est dite géométrique de raison q si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = qu_n$.

Proposition 20 Soit (u_n) une suite géométrique de raison q , alors

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, \quad u_n = q^{n-m}u_m.$$

En particulier : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = q^n u_0$.

Proposition 21 Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 1$, alors la somme des $(n + 1)$ premiers termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donnée par :

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

2.8 Suites adjacentes

Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles.

Définition 15 On dit que ces deux suites sont adjacentes, si l'une est croissante, l'autre est décroissante et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$.

Exemple 10 Soient (u_n) et (v_n) deux suites définies par :

$$u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n!}.$$

Ces deux suites sont adjacentes.

Théorème 6 Deux suites adjacentes sont convergentes et admettent la même limite.

2.9 Suites récurrentes

2.9.1 Suites (u_n) telles que $u_n = f(u_{n-1})$

Théorème 7 Soit f une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ telle que $f(I) \subset I$. Si de plus f est dérivable sur I et vérifie la condition $|f'(x)| \leq K < 1$, alors la suite récurrente $u_n = f(u_{n-1})$ et $u_0 \in I$ est convergente de limite l , où l est l'unique solution de l'équation $f(x) = x$ pour $x \in I$.

Exemple 11 1. $u_0 = 1$ et $u_n = f(u_{n-1})$ pour tout $n \geq 1$ où $f(x) = \frac{1}{2+x}$ pour tout $x > 0$.

2. $u_0 \in [0, 1[$ et $u_{n+1} = \frac{2u_n+1}{u_n+2}$

2.10 Suites (u_n) telles que $u_n = au_{n-1} + bu_{n-2}$

On suppose que $ab \neq 0$ car si non, il est facile de vérifier que les suites définies lorsque $a = 0$ ou $b = 0$ sont géométriques.

On démontre que l'expression de la suite (u_n) dans le cas $a \neq 0$ et $b \neq 0$ dépend des solutions de l'équation du second degré

$$(E) : \quad r^2 - ar - b \quad \text{où} \quad r \in \mathbb{C}$$

On a alors les trois cas suivants :

- **cas** $\Delta = a^2 + 4b > 0$. L'équation (E) possède deux solutions distinctes r_1 et r_2 , et dans ce cas, la solution générale est :

$$u_n = \lambda_1 r_1^n + \lambda_2 r_2^n,$$

et on détermine les constantes λ_1 et λ_2 en résolvant le système :

$$\begin{cases} u_0 = \lambda_1 + \lambda_2 \\ u_1 = \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 \end{cases}$$

- **cas** $\Delta = a^2 + 4b < 0$. L'équation (E) possède deux solutions complexes conjuguées r_1 et $r_2 = \rho e^{i\theta}$, et dans ce cas, la solution générale est alors :

$$u_n = \rho^n (A \cos(n\theta) + B \sin(n\theta)).$$

Les constantes A et B sont obtenues en résolvant le système :

$$\begin{cases} u_0 = A \\ u_1 = \rho (A \cos(\theta) + B \sin(\theta)) \end{cases}$$

- **cas** $\Delta = a^2 + 4b = 0$. L'équation (E) possède une unique solution $r = \frac{a}{2}$. On montre alors que la solution générale est donnée par :

$$u_n = r^n (\lambda_1 + \lambda_2 n),$$

où λ_1 et λ_2 sont déterminées en résolvant le système :

$$\begin{cases} u_0 = \lambda_1 \\ u_1 = r(\lambda_1 + \lambda_2) \end{cases}$$

Chapitre 3

Fonctions réelles. Limite et continuité

3.1 Fonction réelle d'une variable réelle

3.1.1 Définitions

Définition 16 *On appelle fonction réelle d'une variable réelle, toute application f définie sur une partie D de \mathbb{R} à valeur dans \mathbb{R} . L'ensemble D est appelé domaine de définition de f et est noté D_f . On a alors*

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \text{ existe}\}$$

Définition 17 *(Parité d'une fonction)*

- Une fonction f est dite paire si $\forall x \in D_f, -x \in D_f$ et $f(-x) = f(x)$.
- Une fonction f est dite impaire si $\forall x \in D_f, -x \in D_f$ et $f(-x) = -f(x)$.

Définition 18 *(Fonction périodique)*

- Une fonction f est dite périodique, s'il existe un nombre réel positif p non nul tel que

$$\forall x \in D_f, x + p \in D_f \quad \text{et} \quad f(x + p) = f(x).$$

- Le plus petit nombre p satisfaisant à cette définition est appelé la période de la fonction f .

Définition 19 (Fonction bornée)

Soit f une fonction réelle ayant D_f pour domaine de définition. On dit que f est :

- minorée s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in D_f$, on a $m \leq f(x)$.
- majorée s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in D_f$ on a $f(x) \leq M$.
- bornée si f est majorée et minorée.

Définition 20 (Fonction monotone)

Soit f une fonction réelle définie sur D . On dit que f est :

- croissante sur D si : $\forall x_1, x_2 \in D, x_2 \geq x_1 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$.
- strictement croissante sur D si : $\forall x_1, x_2 \in D, x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$.
- décroissante sur D si : $\forall x_1, x_2 \in D, x_2 \geq x_1 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1)$.
- strictement décroissante sur D si : $\forall x_1, x_2 \in D, x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$.
- est monotone si elle est ou bien croissante ou bien décroissante. Elle est dite strictement monotone si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

3.2 Opérations sur les fonctions

Définition 21 (Opérations)

Soient f et g deux fonctions définies sur I . On définit alors :

- la somme de f et g : $\forall x \in I, (f + g)(x) = f(x) + g(x)$.
- le produit de f par un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$: $\forall x \in I, (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$.
- le produit de f et g : $\forall x \in I, (fg)(x) = f(x) \times g(x)$.
- l'inverse de f , pour une fonction f non nulle sur I : $\forall x \in I, \left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{f(x)}$
- la valeur absolue de f : $\forall x \in I, |f|(x) = |f(x)|$.
- une relation d'ordre : $f \leq g$ sur $I \Leftrightarrow \forall x \in I, f(x) \leq g(x)$.

Définition 22 (Composition)

Soit une fonction réelle f définie sur I et une fonction g telle que g soit définie sur $f(I)$. On définit la composition de f et g , notée $g \circ f$ par $\forall x \in I, (g \circ f)(x) = g(f(x))$.

3.3 Limite d'une fonction

Définition 23 Pour $x_0 \in \mathbb{R}$, on appelle voisinage de x_0 tout intervalle de la forme $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$ où $\varepsilon > 0$.

Généralement, un voisinage de x_0 est noté $V(x_0)$ ou V_{x_0} ou tout simplement V .

3.3.1 Limite en un point

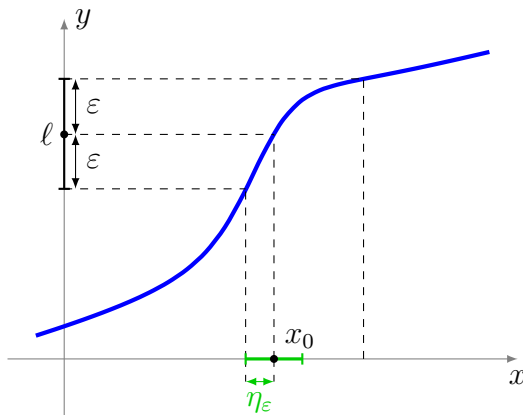
Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} . Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ un point de I ou une extrémité de I .

Définition 24 Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f a pour limite ℓ en x_0 si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta_\varepsilon > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - x_0| < \eta_\varepsilon \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

On dit aussi que $f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers x_0 . On note alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \text{ ou bien } \lim_{x_0} f = \ell.$$



Remarque 8 — L'inégalité $|x - x_0| < \eta_\varepsilon$ équivaut à $x \in]x_0 - \eta_\varepsilon, x_0 + \eta_\varepsilon[$.

L'inégalité $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ équivaut à $f(x) \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$.

— On peut remplacer certaines inégalités strictes « $<$ » par des inégalités larges « \leq » dans la définition : $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta_\varepsilon > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - x_0| \leq \eta_\varepsilon \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$

— Dans la définition de la limite

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta_\varepsilon > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - x_0| < \eta_\varepsilon \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

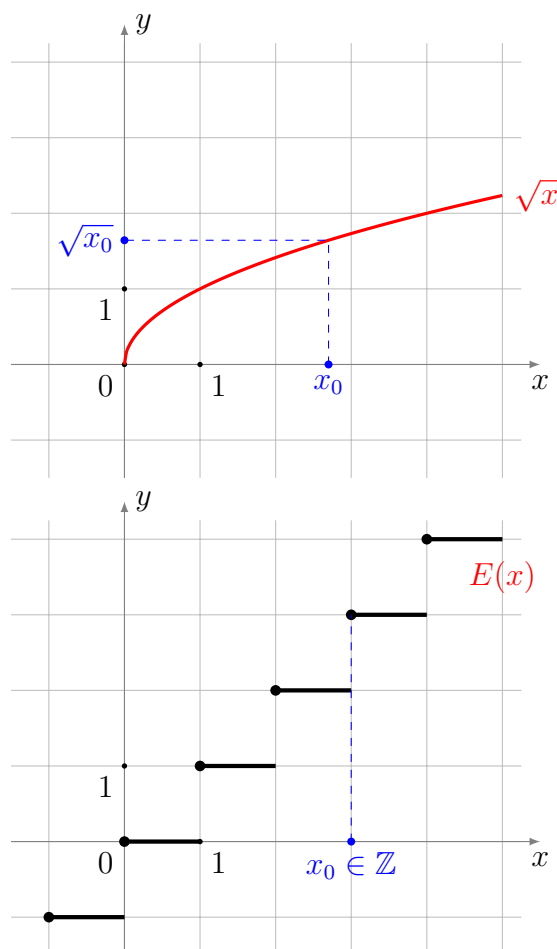
le quantificateur $\forall x \in I$ n'est là que pour être sûr que l'on puisse parler de $f(x)$. Il est souvent omis et l'existence de la limite s'écrit alors juste :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta_\varepsilon > 0 \quad |x - x_0| < \eta_\varepsilon \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

— N'oubliez pas que l'ordre des quantificateurs est important, on ne peut pas échanger le $\forall \varepsilon$ avec le $\exists \eta_\varepsilon$: le η_ε dépend en général du ε . Pour marquer cette dépendance on peut écrire : $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta_\varepsilon(\varepsilon) > 0 \dots$

Exemple 12 — $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$ pour tout $x_0 \geq 0$,

— la fonction partie entière E n'a pas de limite aux points $x_0 \in \mathbb{Z}$.



Soit f une fonction définie sur un ensemble de la forme $]a, x_0[\cup]x_0, b[$.

Définition 25 — On dit que f a pour limite $+\infty$ en x_0 si

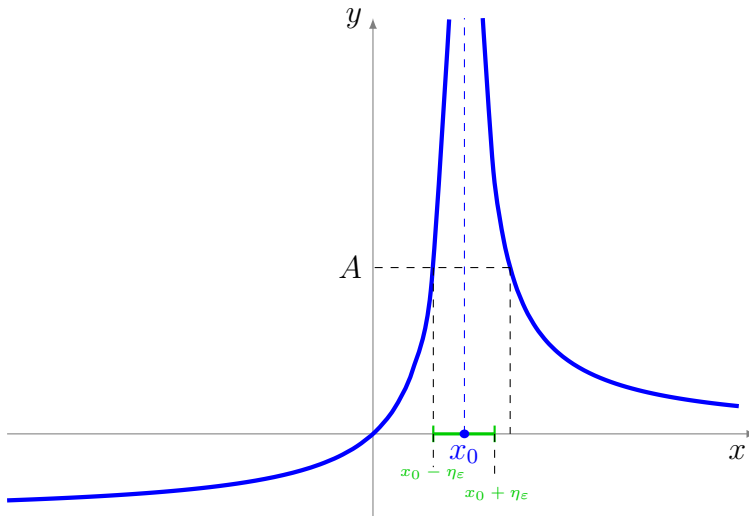
$$\forall A > 0 \quad \exists \eta_\varepsilon > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - x_0| < \eta_\varepsilon \implies f(x) > A$$

On note alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$.

— On dit que f a pour limite $-\infty$ en x_0 si

$$\forall A > 0 \quad \exists \eta_\varepsilon > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - x_0| < \eta_\varepsilon \implies f(x) < -A$$

On note alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$.



3.3.2 Limite en l'infini

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle de la forme $I =]a, +\infty[$.

Définition 26 — Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f a pour limite ℓ en $+\infty$ si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists B > 0 \quad \forall x \in I \quad x > B \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

On note alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ ou $\lim_{+\infty} f = \ell$.

— On dit que f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si

$$\forall A > 0 \quad \exists B > 0 \quad \forall x \in I \quad x > B \implies f(x) > A$$

On note alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

On définirait de la même manière la limite en $-\infty$ pour des fonctions définies sur les intervalles du type $] - \infty, a[$.

Exemple 13 On a les limites classiques suivantes pour tout $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} - \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n &= \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \\ - \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^n}\right) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x^n}\right) &= 0. \end{aligned}$$

Exemple 14 Soit $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ avec $a_n > 0$ et $Q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0$ avec $b_m > 0$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} +\infty & \text{si } n > m \\ \frac{a_n}{b_m} & \text{si } n = m \\ 0 & \text{si } n < m \end{cases}$$

3.3.3 Limite à gauche et à droite

Définition 27 (limite à droite, limite à gauche)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I . On dit que f admet une limite l :

— à gauche en x_0 si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta_\varepsilon > 0, x_0 - \eta_\varepsilon < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

On note $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l$ ou $\lim_{x_0^-} f(x) = l$.

— à droite en x_0 si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta_\varepsilon > 0, x_0 < x < x_0 + \eta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

On note $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l$ ou $\lim_{x_0^+} f(x) = l$.

Proposition 22 Une fonction f admet une limite l en x_0 si et seulement si elle admet l comme limite à gauche et à droite en x_0 , i.e.,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l.$$

Exemple 15 Considérons la fonction partie entière au point $x = 2$:

— comme pour tout $x \in]2, 3[$ on a $E(x) = 2$, on a $\lim_{2^+} E = 2$,

— comme pour tout $x \in [1, 2[$ on a $E(x) = 1$, on a $\lim_{2^-} E = 1$.

Ces deux limites étant différentes, on en déduit que E n'a pas de limite en 2.

3.3.4 Propriétés

Proposition 23 *Si une fonction admet une limite, alors cette limite est unique.*

On ne donne pas la démonstration de cette proposition, qui est très similaire à celle de l'unicité de la limite pour les suites (un raisonnement par l'absurde).

Soient deux fonctions f et g . On suppose que x_0 est un réel, ou que $x_0 = \pm\infty$.

Proposition 24 *Si $\lim_{x_0} f = \ell \in \mathbb{R}$ et $\lim_{x_0} g = \ell' \in \mathbb{R}$, alors :*

- $\lim_{x_0} (\lambda \cdot f) = \lambda \cdot \ell$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$
- $\lim_{x_0} (f + g) = \ell + \ell'$
- $\lim_{x_0} (f \times g) = \ell \times \ell'$
- si $\ell \neq 0$, alors $\lim_{x_0} \frac{1}{f} = \frac{1}{\ell}$

De plus, si $\lim_{x_0} f = +\infty$ (ou $-\infty$) alors $\lim_{x_0} \frac{1}{f} = 0$.

Remarque 9 *Il y a des situations où l'on ne peut rien dire sur les limites. Par exemple si $\lim_{x_0} f = +\infty$ et $\lim_{x_0} g = -\infty$ alors on ne peut à priori rien dire sur la limite de $f + g$ (cela dépend vraiment de f et de g). On raccourci cela en $+\infty - \infty$ est une forme indéterminée.*

Voici une liste de formes indéterminées : $+\infty - \infty$; $0 \times \infty$; $\frac{\infty}{\infty}$; $\frac{0}{0}$; 1^∞ ; ∞^0 .

Proposition 25 — *Si $f \leq g$ et si $\lim_{x_0} f = \ell \in \mathbb{R}$ et $\lim_{x_0} g = \ell' \in \mathbb{R}$, alors*

- $\ell \leq \ell'$.
- *Si $f \leq g$ et si $\lim_{x_0} f = +\infty$, alors $\lim_{x_0} g = +\infty$.*
- *(Théorème des gendarmes).*

Si $f \leq g \leq h$ et si $\lim_{x_0} f = \lim_{x_0} h = \ell \in \mathbb{R}$, alors g a une limite en x_0 et $\lim_{x_0} g = \ell$.

3.4 Continuité d'une fonction

3.4.1 Continuité en un point

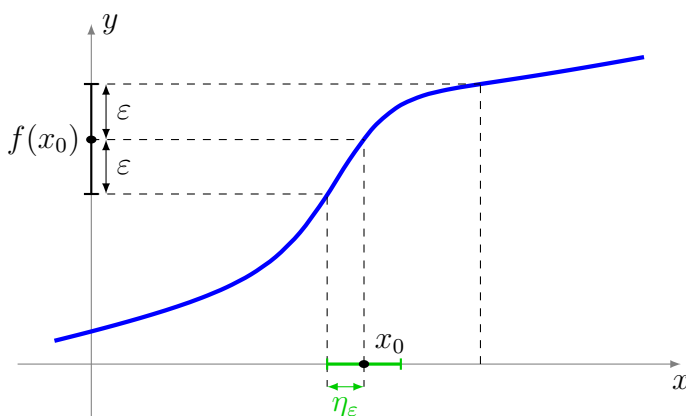
Soit I un intervalle de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

Définition 28 — On dit que f est continue en un point $x_0 \in I$ si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta_\varepsilon > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - x_0| < \eta_\varepsilon \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

c'est-à-dire si f admet une limite en x_0 , cette limite vaut alors nécessairement $f(x_0)$.

— On dit que f est continue sur I si f est continue en tout point de I .



Exemple 16 La fonction f définie par \sqrt{x} est continue en a ($a \in \mathbb{R}_+^*$).

Proposition 26 Si f est continue en a , alors f est bornée au voisinage de a .

La réciproque est fautive, comme le montre l'exemple suivant : f définie sur $[0, 1]$ par

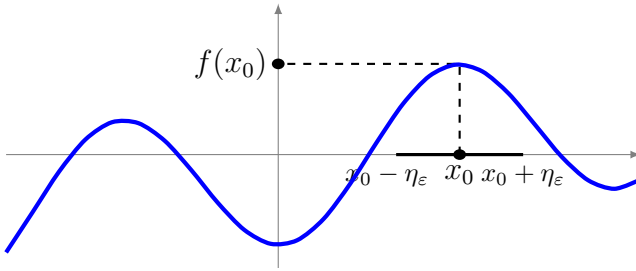
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

3.4.2 Propriétés

La continuité assure par exemple que si la fonction n'est pas nulle en un point (qui est une propriété ponctuelle) alors elle n'est pas nulle autour de ce point (propriété locale). Voici l'énoncé :

Lemme 1 Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I et x_0 un point de I . Si f est continue en x_0 et si $f(x_0) \neq 0$, alors il existe $\eta_\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall x \in]x_0 - \eta_\varepsilon, x_0 + \eta_\varepsilon[\quad f(x) \neq 0$$



Preuve 5 Supposons par exemple que $f(x_0) > 0$, le cas $f(x_0) < 0$ se montrerait de la même manière. Écrivons ainsi la définition de la continuité de f en x_0 :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta_\varepsilon > 0 \quad \forall x \in I \quad x \in]x_0 - \eta_\varepsilon, x_0 + \eta_\varepsilon[\implies f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon.$$

Il suffit donc de choisir ε tel que $0 < \varepsilon < f(x_0)$. Il existe alors bien un intervalle $J = I \cap]x_0 - \eta_\varepsilon, x_0 + \eta_\varepsilon[$ tel que pour tout x dans J , on a $f(x) > 0$.

La continuité se comporte bien avec les opérations élémentaires. Les propositions suivantes sont des conséquences immédiates des propositions analogues sur les limites.

Proposition 27 Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues en un point $x_0 \in I$. Alors

- $\lambda \cdot f$ est continue en x_0 (pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$),
- $f + g$ est continue en x_0 ,
- $f \times g$ est continue en x_0 ,
- si $f(x_0) \neq 0$, alors $\frac{1}{f}$ est continue en x_0 .

La proposition précédente permet de vérifier que d'autres fonctions usuelles sont continues :

Exemple 17 — les fonctions puissance $x \mapsto x^n$ sur \mathbb{R} (comme produit $x \times x \times \dots$),
 — les polynômes sur \mathbb{R} (somme et produit de fonctions puissance et de fonctions constantes),
 — les fractions rationnelles $x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$ sur tout intervalle où le polynôme $Q(x)$ ne s'annule pas.

La composition conserve la continuité (mais il faut faire attention en quels points les hypothèses s'appliquent).

Proposition 28 Soient $f : I \rightarrow J$ et $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f(I) \subset J$. Si f est continue en un point $x_0 \in I$ et si g est continue en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est continue en x_0 .

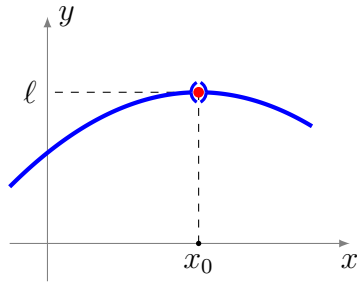
3.4.3 Prolongement par continuité

Définition 29 Soit I un intervalle, x_0 un point de I et $f : I \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

- On dit que f est prolongeable par continuité en x_0 si f admet une limite finie en x_0 . Notons alors $\ell = \lim_{x \rightarrow x_0} f$.
- On définit alors la fonction $\tilde{f} : I \rightarrow \mathbb{R}$ en posant pour tout $x \in I$

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ \ell & \text{si } x = x_0. \end{cases}$$

Alors \tilde{f} est continue en x_0 et on l'appelle le prolongement par continuité de f en x_0 .



Exemple 18 Considérons la fonction f définie sur \mathbb{R}^* par $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$. Voyons si f admet un prolongement par continuité en 0 ?

Comme pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ on a $|f(x)| \leq |x|$, on en déduit que f tend vers 0 en 0. Elle est donc prolongeable par continuité en 0 et son prolongement est la fonction \tilde{f} définie sur \mathbb{R} tout entier par :

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

3.4.4 Suites et continuité

Proposition 29 Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et x_0 un point de I . Alors :
 f est continue en $x_0 \iff$ pour toute suite (u_n) qui converge vers x_0
la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(x_0)$

Remarque 10 On retiendra surtout l'implication : si f est continue sur I et si (u_n) est une suite convergente de limite ℓ , alors $(f(u_n))$ converge vers $f(\ell)$. On l'utilisera intensivement pour l'étude des suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$: si f est continue et $u_n \rightarrow \ell$, alors $f(\ell) = \ell$.

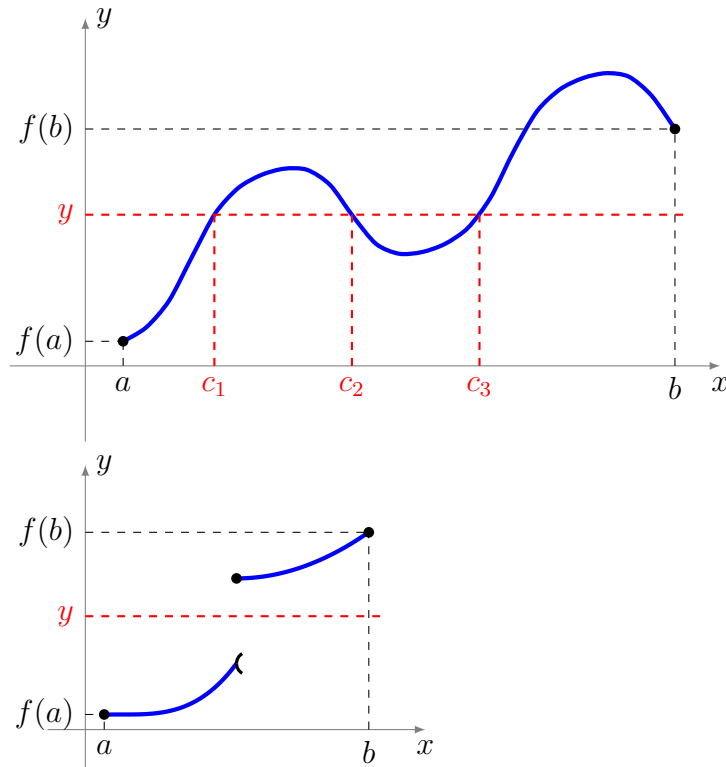
3.5 Continuité sur un intervalle

3.5.1 Le théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 8 (Théorème des valeurs intermédiaires)

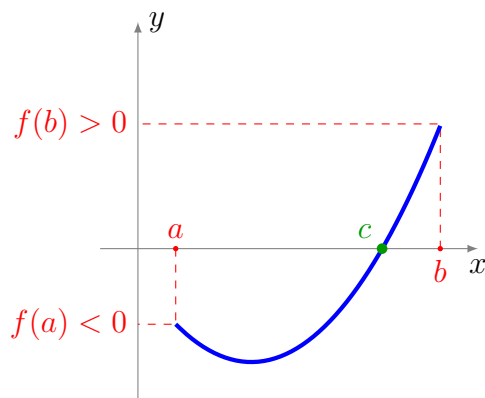
Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment. Pour tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$,
il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = y$.

Une illustration du théorème des valeurs intermédiaires, le réel c n'est pas nécessairement unique. De plus si la fonction n'est pas continue, le théorème n'est plus vrai.

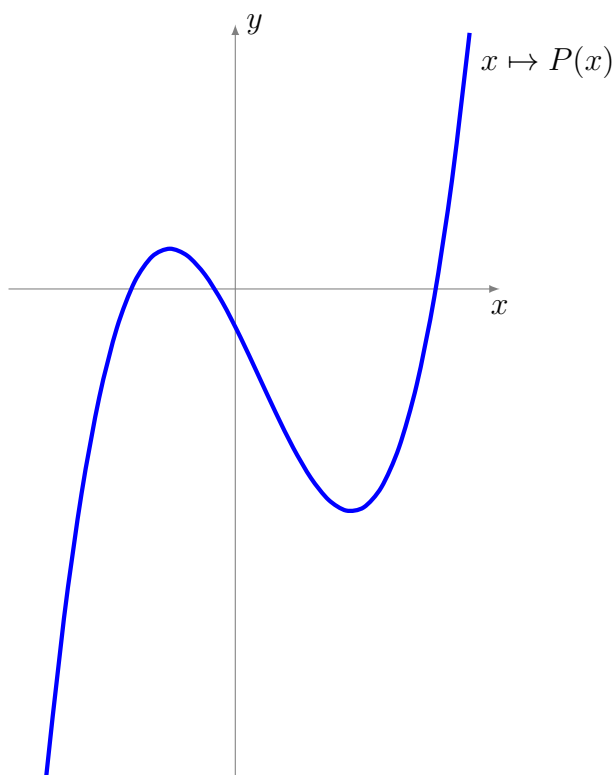


Théorème 9 (Théorème de Bolzano)

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(a)f(b) \leq 0$, alors il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = 0$.



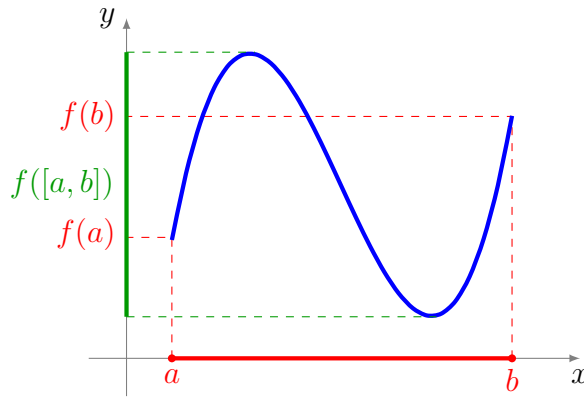
Exemple 19 Tout polynôme de degré impair possède au moins une racine réelle.



En effet, un tel polynôme s'écrit $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ avec n un entier impair. On peut supposer que le coefficient a_n est strictement positif. Alors on a $\lim_{x \rightarrow -\infty} P = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} P = +\infty$. En particulier, il existe deux réels a et b tels que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$ et on conclut grâce au corollaire précédent.

Corollaire 1 Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I . Alors $f(I)$ est un intervalle.

Attention! Il serait faux de croire que l'image par une fonction f de l'intervalle $[a, b]$ soit l'intervalle $[f(a), f(b)]$ (voir la figure ci-dessous).



Preuve 6 Soient $y_1, y_2 \in f(I)$, $y_1 \leq y_2$. Montrons que si $y \in [y_1, y_2]$, alors $y \in f(I)$. Par hypothèse, il existe $x_1, x_2 \in I$ tels que $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$ et donc y est compris entre $f(x_1)$ et $f(x_2)$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, comme f est continue, il existe donc $x \in I$ tel que $y = f(x)$, et ainsi $y \in f(I)$.

Définition 30 (injectivité, surjectivité, bijectivité)

— Une application $f : E \rightarrow F$ est injective si tout élément de F a au plus un antécédent par f , i.e.,

$$\forall x_1, x_2 \in E, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

— Une application $f : E \rightarrow F$ est surjective si tout élément de F a au moins un antécédent par f , i.e.,

$$\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x).$$

— Une application $f : E \rightarrow F$ est bijective si elle est à la fois injective et surjective, i.e.,

$$\forall y \in F, \exists! x \in E, y = f(x).$$

Définition 31 (Fonction réciproque)

Soit une application bijective $f : E \rightarrow F$. Il existe alors une unique application notée $f^{-1} : F \rightarrow E$ telle que $f^{-1} \circ f = Id_E$ et $f \circ f^{-1} = Id_F$. L'application f^{-1} est appelée application réciproque de f .

Proposition 30 (Fonction réciproque et monotonie)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} . Si f est continue et strictement monotone sur I alors f réalise une bijection de I dans $f(I)$.

Exemple 20 La fonction $x \mapsto e^x$ est une bijection de \mathbb{R} sur \mathbb{R}_+^* , sa fonction réciproque est $f^{-1}(x) = \text{Log}(x)$.

Proposition 31 Soient I de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue, alors :

$$f \text{ est injective} \iff f \text{ est strictement monotone sur } I$$

3.6 Fonctions uniformément continues

Définition 32 Soit $I \subset \mathbb{R}$, et $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est uniformément continue sur D si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta_\varepsilon > 0 \quad \text{tel que} \quad \forall x, x' \in I, |x - x'| \leq \eta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(x')| \leq \varepsilon.$$

Remarque 11 — Il est immédiat que l'uniforme continuité de f sur I entraîne sa continuité en tout point de I .

— La réciproque n'est pas toujours vraie, mais nous avons le théorème suivant.

Exemple 21 La fonction $f : x \rightarrow x^2$ n'est pas uniformément continue sur \mathbb{R} .

Théorème 10 (Heine)

Soit $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervalle fermé borné de \mathbb{R} , $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue sur I . Alors f est uniformément continue sur I .

Définition 33 (Fonction lipschitzienne)

Soit $I \subset \mathbb{R}$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est

— k -lipschitzienne sur I si

$$\forall x, x' \in I, |f(x) - f(x')| \leq k|x - x'|.$$

— k -contractante sur I si f est k -lipschitzienne et $k \in [0, 1[$.

Proposition 32 Soit $I \subset \mathbb{R}$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction k -lipschitzienne sur I . Alors f est uniformément continue sur I .

Exemple 22 1. La fonction $f : x \rightarrow x^2$ est uniformément continue sur $[0, 1]$.

2. La fonction $x \rightarrow \sin x$ est uniformément continue sur \mathbb{R} .

3.7 Fonctions continues et suites de réels

Proposition 33 Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue vérifiant $f([a, b]) \subset [a, b]$. Soit $\alpha \in [a, b]$ et (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \alpha \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{pour } n \geq 0. \end{cases}$$

Alors si la suite (u_n) converge, elle converge vers un point fixe de f dans l'intervalle $[a, b]$, c'est-à-dire un point $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = x$.

Théorème 11 (Théorème du point fixe)

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue vérifiant $f([a, b]) \subset [a, b]$ et f contractante de rapport $k \in [0, 1[$. Soit $\alpha \in [a, b]$ et (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \alpha \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{pour } n \geq 0. \end{cases}$$

Alors la suite (u_n) converge vers l'unique point fixe de f dans l'intervalle $[a, b]$.

Remarque 12 Soit f une fonction dérivable sur $[a, b]$ tel que $|f'(x)| \leq K, \forall x \in [a, b]$ où $K \in [0, 1[$, alors f est K -contractante sur $[a, b]$.

Chapitre 4

Dérivabilité d'une fonction réelle

4.1 Fonctions dérivables

4.1.1 Définitions

Soit I un intervalle ouvert de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Soit $x_0 \in I$.

Définition 34 f est dérivable en x_0 si le taux d'accroissement $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ a une limite finie lorsque x tend vers x_0 . La limite s'appelle alors le nombre dérivé de f en x_0 et est noté $f'(x_0)$. Ainsi $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Définition 35 f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point $x_0 \in I$. La fonction $x \mapsto f'(x)$ est la fonction dérivée de f , elle se note f' ou $\frac{df}{dx}$.

Exemple 23 La fonction définie par $f(x) = x^2$ est dérivable en tout point $x_0 \in \mathbb{R}$. En effet :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = x + x_0 \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 2x_0.$$

On a même montré que le nombre dérivé de f en x_0 est $2x_0$, autrement dit : $f'(x) = 2x$.

Exemple 24 Montrons que la dérivée de $f(x) = \sin x$ est $f'(x) = \cos x$. Nous allons utiliser les deux assertions suivantes :

$$\frac{\sin x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1 \quad \text{et} \quad \sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p - q}{2} \cdot \cos \frac{p + q}{2}.$$

Remarquons déjà que la première assertion prouve $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$ et donc f est dérivable en $x_0 = 0$ et $f'(0) = 1$.

Pour x_0 quelconque on écrit :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = \frac{\sin \frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}} \cdot \cos \frac{x+x_0}{2}.$$

Lorsque $x \rightarrow x_0$ alors d'une part $\cos \frac{x+x_0}{2} \rightarrow \cos x_0$ et d'autre part en posant $u = \frac{x-x_0}{2}$ alors $u \rightarrow 0$ et on a $\frac{\sin u}{u} \rightarrow 1$. Ainsi $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \rightarrow \cos x_0$ et donc $f'(x) = \cos x$.

Interprétation géométrique. Dire que f est dérivable en x_0 , c'est dire que la courbe (C_f) de f présente au point $A = (x_0, f(x_0))$ une tangente (Δ) non verticale d'équation $y = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$.

Proposition 34 — f est dérivable en x_0 si et seulement si $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ existe et est finie.

— f est dérivable en x_0 si et seulement s'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ (qui sera $f'(x_0)$) et une fonction $\varepsilon : I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$ avec

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\ell + (x - x_0)\varepsilon(x).$$

4.1.2 Propriétés

Proposition 35 Soit I un intervalle ouvert, $x_0 \in I$ et soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

- Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0 .
- Si f est dérivable sur I alors f est continue sur I .

Preuve 7 Supposons f dérivable en x_0 et montrons qu'elle est aussi continue en ce point.

Nous écrivons

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{(x - x_0)}_{\rightarrow 0} \ell + \underbrace{(x - x_0)\varepsilon(x)}_{\rightarrow 0}.$$

Donc $f(x) \rightarrow f(x_0)$ lorsque $x \rightarrow x_0$ et ainsi f est continue en x_0 .

On reprend cette démonstration sans utiliser les limites mais uniquement la définition de continuité et dérivabilité :

fixons $\varepsilon' > 0$ et écrivons $f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\ell + (x - x_0)\varepsilon(x)$, où $\varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$ et $\ell = f'(x_0)$. Choisissons $\delta > 0$ de sorte qu'il vérifie tous les points suivants :

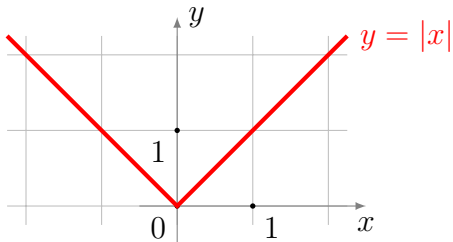
- $\delta \leq 1$,
- $\delta|\ell| < \varepsilon'$,
- si $|x - x_0| < \delta$ alors $|\varepsilon(x)| < \varepsilon'$ (c'est possible car $\varepsilon(x) \rightarrow 0$).

Alors l'égalité ci-dessus devient :

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |(x - x_0)\ell + (x - x_0)\varepsilon(x)| \\ &\leq |x - x_0| \cdot |\ell| + |x - x_0| \cdot |\varepsilon(x)| \\ &\leq \delta|\ell| + \delta\varepsilon' \quad \text{pour } |x - x_0| < \delta \\ &\leq \varepsilon' + \varepsilon' = 2\varepsilon' \end{aligned}$$

Nous venons de prouver que si $|x - x_0| < \delta$ alors $|f(x) - f(x_0)| < 2\varepsilon'$, ce qui exprime exactement que f est continue en x_0 .

Remarque 13 La réciproque est **fausse** : par exemple, la fonction valeur absolue est continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0.



En effet, le taux d'accroissement de $f(x) = |x|$ en $x_0 = 0$ vérifie :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} +1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

Il y a bien une limite à droite (qui vaut +1), une limite à gauche (qui vaut -1) mais elles ne sont pas égales : il n'y a pas de limite en 0. Ainsi f n'est pas dérivable en $x = 0$.

Cela se lit aussi sur le dessin, il y a une demi-tangente à droite, une demi-tangente à gauche, mais elles ont des directions différentes.

4.1.3 Extremums et dérivabilités

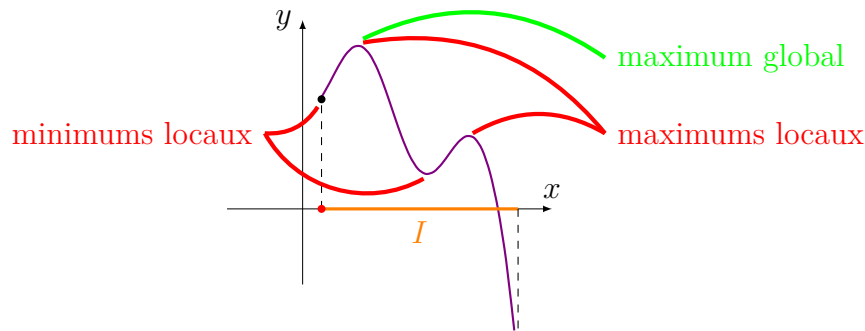
Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I .

Définition 36 — On dit que x_0 est un point critique de f si $f'(x_0) = 0$.
 — On dit que f admet un maximum local en x_0 (resp. un minimum local en x_0) s'il existe un intervalle ouvert J contenant x_0 tel que

$$\text{pour tout } x \in I \cap J \quad f(x) \leq f(x_0)$$

(resp. $f(x) \geq f(x_0)$).

— On dit que f admet un extremum local en x_0 si f admet un maximum local ou un minimum local en ce point.



Proposition 36 Soit f une fonction réelle admettant un extremum local en x_0 . Si f est dérivable en x_0 , alors $f'(x_0) = 0$.

Remarque 14 La réciproque de la proposition précédente n'est pas toujours vraie. En effet, pour $f(x) = x^3$, on a $f'(0) = 0$, mais 0 n'est pas un extremum local.

Proposition 37 (Opérations sur les fonctions)

Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur I . Alors pour tout $x \in I$:

- $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
- $(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$ où λ est un réel fixé
- $(f \times g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- $\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)^2}$ (si $f(x) \neq 0$)
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$ (si $g(x) \neq 0$)

Proposition 38 Si f est dérivable en x et g est dérivable en $f(x)$ alors $g \circ f$ est dérivable en x de dérivée : $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

4.2 Dérivées successives

Définition 37 Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable et soit f' sa dérivée.

Si la fonction $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$ est aussi dérivable on note $f'' = (f')'$ la dérivée seconde de f .

Plus généralement on note :

$$f^{(0)} = f, \quad f^{(1)} = f', \quad f^{(2)} = f'' \quad \text{et} \quad f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$$

Si la dérivée n -ième $f^{(n)}$ existe on dit que f est n fois dérivable.

Définition 38 Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction n fois dérivable sur I . Si de plus $f^{(n)}$ est continue sur I , on dit que f est de classe C^n sur I . On note $C^n(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe C^n de I dans \mathbb{R} .

On dit que f est de classe C^∞ sur I si f est n fois dérivable sur I pour tout entier naturel n . On note $C^\infty(I, \mathbb{R})$ l'ensemble de ces fonctions.

Remarque 15 1. L'ensemble $C^0(I, \mathbb{R})$ désigne l'ensemble des fonctions réelles continues sur I .

2. On vérifie l'équivalence suivante : $f^{(n)} \equiv 0 \Leftrightarrow f$ est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à $n - 1$ sur I .

Proposition 39 (Formule de Leibniz)

$$(f \cdot g)^{(n)} = f^{(n)} \cdot g + \binom{n}{1} f^{(n-1)} \cdot g^{(1)} + \dots + \binom{n}{k} f^{(n-k)} \cdot g^{(k)} + \dots + f \cdot g^{(n)}$$

Autrement dit :

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)} \cdot g^{(k)}.$$

Exemple 25 — Pour $n = 1$ on retrouve $(f \cdot g)' = f'g + fg'$.

— Pour $n = 2$, on a $(f \cdot g)'' = f''g + 2f'g' + fg''$.

4.3 Théorème de Rolle et accroissements finis

Théorème 12 (Théorème de Rolle)

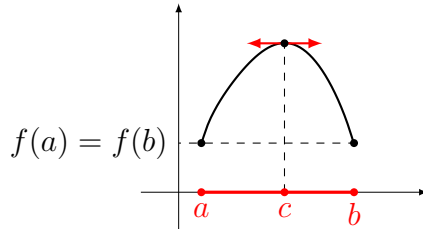
Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

— f est continue sur $[a, b]$,

— f est dérivable sur $]a, b[$,

— $f(a) = f(b)$.

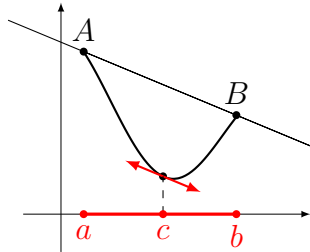
Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.



Interprétation géométrique : il existe au moins un point du graphe de f où la tangente est horizontale.

Théorème 13 (*Théorème des accroissements finis*)

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$



Interprétation géométrique : il existe au moins un point du graphe de f où la tangente est parallèle à la droite (AB) où $A = (a, f(a))$ et $B = (b, f(b))$.

Lemme 2 (*Théorème des accroissements finis généralisé*)

Soient f et $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $[a, b]$, dérivables sur $]a, b[$. On suppose que $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a, b[$, alors :

$$\exists c \in]a, b[\quad \text{tel que} \quad \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Corollaire 2 Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

1. $\forall x \in]a, b[\quad f'(x) \geq 0 \iff f$ est croissante ;
2. $\forall x \in]a, b[\quad f'(x) \leq 0 \iff f$ est décroissante ;
3. $\forall x \in]a, b[\quad f'(x) = 0 \iff f$ est constante ;

4. $\forall x \in]a, b[\quad f'(x) > 0 \quad \implies \quad f \text{ est strictement croissante ;}$
 5. $\forall x \in]a, b[\quad f'(x) < 0 \quad \implies \quad f \text{ est strictement décroissante.}$

Remarque 16 *La réciproque au point (4) (et aussi au (5)) est fautive. Par exemple la fonction $x \mapsto x^3$ est strictement croissante et pourtant sa dérivée s'annule en 0.*

Théorème 14 *(Règle de l'Hospital)*

Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables et soit $x_0 \in I$. On suppose que

- $f(x_0) = g(x_0) = 0$,
- $\forall x \in I \setminus \{x_0\} \quad g'(x) \neq 0$.

Si $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \quad (\in \mathbb{R})$ alors $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$.

Remarque 17 .

- *La règle de l'Hospital permet de lever (parfois) des formes indéterminées du type $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$ dans le cas où f et g tendent toutes les deux vers 0 en x_0 , ou vers $\pm\infty$, et si le rapport $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ admet une limite finie ou égale à $\pm\infty$ en x_0 .*
- *La réciproque du théorème précédent est fautive.*
- *Dans le cas où f' et g' vérifient les mêmes conditions que f et g ci-dessus, on recommence à nouveau le procédé.*

Exemple 26 .

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x - 1}$
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x}$

4.4 Formule de Taylor-Young

4.4.1 Développement de Taylor-Young d'une fonction

Définition 39 — *On dit que la fonction f vérifie les conditions de Taylor-Young à l'ordre 0 au point $x_0 \in \mathbb{R}$, si f est continue en x_0 .*

- On dit que la fonction f vérifie les conditions de Taylor-Young à l'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ au point $x_0 \in \mathbb{R}$, si il existe un intervalle ouvert $I =]x_0 - h, x_0 + h[$ tel que f soit $(n - 1)$ fois dérivable sur I et $f^{(n-1)}$ étant dérivable en x_0 .

Remarque 18 Une fonction de classe C^n sur I vérifie les conditions de Taylor-Young à l'ordre n , en $x_0 \in I$.

Théorème 15 Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^n et soit $x_0 \in I$. Alors pour tout $x \in I$ on a :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots \\ \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + (x - x_0)^n \varepsilon(x),$$

où ε est une fonction définie sur I telle que $\varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$.

Notations .

- Le développement de f obtenu ci-dessus est appelé Développement de Taylor-Young de f à l'ordre n en x_0 . On le note $\text{DTY}_n(x_0)$.
- La partie polynomiale de ce développement est appelée partie régulière (ou principale).
- $(x - x_0)^n \varepsilon(x)$ est appelé terme complémentaire.

Remarque 19 Un développement de Taylor-Young de f écrit en $x_0 = 0$ est appelé développement de Taylor-MacLaurin. Ce développement s'écrit :

$$\forall x \in I : f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + x^n \varepsilon(x),$$

Exemple 27 Soit n un entier naturel donné, on peut vérifier que le $\text{DTY}_n(0)$ (ou le développement de Taylor-MacLaurin) est donné pour quelques fonctions usuelles par :

1. $\exp x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + x^n \varepsilon(x)$
2. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1} \varepsilon(x)$
3. $\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2} \varepsilon(x)$
4. $(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + x^n \varepsilon(x)$

4.5 Dérivation et intégration de DTY

Théorème 16 *La partie régulière du $DTY_{n(x_0)}$ de f' s'obtient en dérivant la partie régulière du $DTY_{n+1}(x_0)$ de f , i.e., si*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots \\ \dots + \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} + (x - x_0)^{n+1}\varepsilon(x),$$

alors

$$f'(x) = f'(x_0) + f''(x_0)(x - x_0) + \frac{f^{(3)}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots \\ \dots + \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + (x - x_0)^n\varepsilon(x).$$

Exemple 28 *Considérons le $DTY_{2n+1}(0)$ de $f(x) = \sin x$ donné par :*

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2}\varepsilon(x)$$

On voit alors qu'en dérivant, on a :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x)$$

et on retrouve le $DTY_{2n}(0)$ de $\cos x$.

Théorème 17 *La partie régulière du $DTY_n(x_0)$ de F la primitive de f qui s'annule en x_0 s'obtient en intégrant la partie régulière du $DTY_{n-1}(x_0)$ de f , plus précisément, si*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots \\ \dots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + (x - x_0)^{n-1}\varepsilon_1(x),$$

alors

$$\forall x \in I, F(x) = \int_{x_0}^x f(x)dx = f(x_0)(x - x_0) + f'(x_0)\frac{(x - x_0)^2}{2} + \dots \\ \dots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + (x - x_0)^n\varepsilon_2(x),$$

Exemple 29 En prenant $\alpha = -1$ dans le DTY $_{n-1}(0)$ de $f(t) = (1+t)^\alpha$, on a :

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - \dots + (-1)^{n-1}t^{n-1} + t^{n-1}\varepsilon(t), \forall t > -1,$$

d'où en intégrant, on a :

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t} dt = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + x^n \varepsilon(x), \forall x > -1.$$

4.6 Développements limités

4.6.1 Notions sur les développements limités

Définition 40 Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $x_0 \in I$. On dit que f possède un développement limité d'ordre n en x_0 (qu'on note $DL_n(x_0)$), s'il existe un polynôme P_n de degré inférieur ou égal à n et une fonction ε de limite nulle en x_0 tels que

$$f(x) = P_n(x - x_0) + (x - x_0)^n \varepsilon(x), \forall x \in I \setminus x_0,$$

i.e., il existe $n+1$ réels a_0, a_1, \dots, a_n et une fonction ε de limite nulle en x_0 tels que

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n \varepsilon(x) \\ &= \sum_{i=0}^n a_i(x - x_0)^i + (x - x_0)^n \varepsilon(x) \end{aligned} \quad (4.1)$$

Remarque 20 1. Dire que f admet un développement limité à l'ordre n en x_0 signifie qu'il existe des réels a_0, a_1, \dots, a_n tels que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - (a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n)}{(x - x_0)^n} = 0$$

On voit donc que plus n est grand meilleure est donc l'approximation de $f(x)$ par le polynôme $a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n$ au voisinage de x_0 .

Pour tout x proche de x_0 (i.e. $x \in V_{x_0}$ un voisinage de x_0), le terme complémentaire $(x - x_0)^n \varepsilon(x)$ est négligeable devant n'importe quel monôme de la partie régulière $a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n$.

Proposition 40 *La partie régulière (principale) du développement limité d'une fonction f est unique. i.e., les coefficients a_0, a_1, \dots, a_n du $DL_n(x_0)$ d'une fonction sont définis de façon unique.*

Corollaire 3 *Si une fonction f est paire (respectivement impaire), alors la partie régulière de son $DL_n(0)$ ne contient que des monômes d'exposant pair (respectivement impair).*

Définition 41 *Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage de $+\infty$ (ou de $-\infty$). Soit $n \in \mathbb{N}$, on dit que f possède un développement limité d'ordre n en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$) s'il existe des réels a_0, a_1, \dots, a_n et une fonction ε de limite nulle en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$) tels que*

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x^1} + \frac{a_2}{x^2} + \dots + \frac{a_n}{x^n} + \frac{\varepsilon(x)}{x^n} = \sum_{i=0}^n \frac{a_i}{x^i} + \frac{\varepsilon(x)}{x^n}, \forall x \in I.$$

Remarque 21 1. *Pour calculer le développement limité d'une fonction f en $\pm\infty$, on se ramène au calcul du développement limité de f en 0 en posant $t = \frac{1}{x}$.*

2. *Un développement limité de la forme*

$$f(x) = a_{-p}x^{-p} + \dots + a_{-2}x^{-2} + a_{-1}x^{-1} + a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + x^n\varepsilon(x); \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0,$$

est appelé un développement limité généralisé.

Exemple 30 *Calculer le $DL_4(\infty)$ de $f(x) = x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right)$.*

4.7 Opérations sur les développements limités

Proposition 41 *Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions réelles définies sur I et admettant chacune un $DL_n(0)$ donné par $f(x) = P_n(x) + x^n\varepsilon(x)$ et $g(x) = Q_n(x) + x^n\varepsilon(x), \forall x \in I$. Alors*

— *$f + g$ admet un $DL_n(0)$ donné par*

$$(f + g)(x) = (P_n + Q_n)(x) + x^n\varepsilon(x).$$

— $\alpha.f$ admet un $DL_n(0)$ donné par

$$(\alpha.f)(x) = (\alpha.P_n)(x) + x^n \varepsilon(x).$$

— $f.g$ admet un $DL_n(0)$ donné par

$$(f.g)(x) = T(x) + x^n \varepsilon(x),$$

où $T(x)$ est le polynôme de degré inférieur ou égal à n obtenu par troncature du polynôme $(P.Q)(x)$.

Exemple 31 Déterminer le $DL_3(0)$ de f

1. $f(x) = e^x + \sin(x)$
2. $g(x) = e^x \sin(x)$

Proposition 42 Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions réelles définies sur I et admettant chacune un $DL_n(0)$ donné par

$$f(x) = P_n(x) + x^n \varepsilon(x)$$

et

$$g(x) = Q_n(x) + x^n \varepsilon(x), \forall x \in I.$$

Si $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) \neq 0$ (c'est à dire si le terme constant de $Q_n(x)$ n'est pas nul), alors $\frac{f}{g}$ admet un $DL_n(0)$ donné par

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = S(x) + x^n \varepsilon(x),$$

où $S(x)$ est le polynôme quotient, à l'ordre n de la division suivant les puissances croissantes, de $P_n(x)$ par $Q_n(x)$.

Exemple 32 Déterminer le $DL_3(0)$ de $f(x) = \frac{\sin(x)}{e^x}$.

Proposition 43 Soit f une fonction continue en 0 et admettant un $DL_n(0)$ de partie principale $P_n(x)$ et u une fonction admettant un $DL_n(0)$ de partie principale $Q_n(x)$ et tel que $\lim_0 u(x) = 0$ (c'est à dire $Q_n(0) = 0$).

Alors, $f.u$ admet un $DL_n(0)$ de partie principale $R(x)$ le polynôme de degré inférieur ou égal à n obtenu par troncature du polynôme $P(Q(x))$.

Exemple 33 Déterminer le $DL_3(0)$ de $f(x) = e^{\sin(x)}$.

4.8 Application des développements limités

4.8.1 Recherche de limites

Dans le cas où le calcul de $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ n'est pas simple, on peut utiliser les développements limités en respectant la démarche suivante :

1. On effectue un changement de variables $h = (x - x_0)$ ou $h = \frac{1}{x}$ pour se ramener en 0 ;
2. si f est définie comme produit de fonctions, on cherche séparément un équivalent simple de chaque produit ;
3. un développement limité $h(x) = a_k x^k + x^k \varepsilon(x)$ avec $a_k \neq 0$ et $\lim_0 \varepsilon(x) = 0$ donne l'équivalent $h(x) \sim a_k x^k$;
4. on peut sommer des DL, c'est leur principal avantage sur les équivalents.

Exemple 34 Déterminer la limite quand x tend vers 0 de la fonction f définie par $f(x) = \frac{1-x \sin(x) - \cos(x)}{(e^x - 1)^2}$.

Exemple 35 Déterminer la limite quand x tend vers 0 de la fonction f définie par $f(x) = (\cos x)^{\frac{1}{x}}$.

4.8.2 Prolongement. Position locale par rapport à la tangente

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]x_0, \alpha[$ ou $] \alpha, x_0[$ et admettant un développement limité en x_0 de la forme :

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_k(x - x_0)^k + x^k \varepsilon(x)$$

, avec $a_k \neq 0$ et $\lim_{x_0} \varepsilon(x) = 0$.

Alors :

- la fonction f se prolonge par continuité en x_0 en posant $f(x_0) = a_0$.
- le prolongement de f ainsi défini est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = a_1$.
- l'équation de (T) la tangente à (C_f) la courbe de f en x_0 est donnée par $y = a_0 + a_1(x - x_0)$.
- le signe de l'expression $a_k(x - x_0)^k$ permet de donner la position locale de la courbe (C_f) par rapport à sa tangente (T) .

Exemple 36 *Etude locale en $x_0 = -1$ de la courbe d'équation $y = \frac{x^2-x-6}{x^2+2x-3}$.*

Exemple 37 *Etude locale en $x_0 = 0$ de la courbe d'équation $y = \sqrt[3]{1+2x} - \sqrt{4+x}$.*

4.8.3 Etude des branches infinies

Pour étudier une branche infinie d'une courbe $y = f(x)$ en $+\infty$:

1. on fait le changement de variables $h = \frac{1}{x}$.
2. on effectue un "développement généralisé" de $f(h)$ en 0 avec un terme significatif qui tend vers 0.
3. on revient à $f(x)$ pour obtenir un "développement asymptotique" que l'on interprète pour trouver l'équation d'une asymptote et la position locale de la courbe par rapport à l'asymptote.

Exemple 38 *Etudier les branches infinies de la courbe représentative de la fonction f définie sur \mathbb{R}^* par $f(x) = x(1 + e^{\frac{1}{x}})$.*

Chapitre 5

Fonctions trigonométriques, hyperboliques et réciproques

5.1 Résultat général

Théorème 18 Soient I un intervalle de \mathbb{R} et f une application de I dans \mathbb{R} continue et strictement monotone sur I , alors

1. L'ensemble image $J = f(I)$ est un intervalle de \mathbb{R} .
2. $f : I \rightarrow J$ est une bijection et son application réciproque $f^{-1} : J \rightarrow I$ est continue sur J et de plus strictement monotone et varie dans le même sens que f .
3. f^{-1} est dérivable en tout point $y = f(x)$ tel que $f'(x) \neq 0$ et on a $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$.
4. Si $f'(a) = 0$, alors f^{-1} n'est pas dérivable en $b = f(a)$ et la courbe d'équation $y = f^{-1}(x)$ admet une tangente verticale au point d'abscisse $b = f(a)$.
5. Dans un repère orthonormé, les courbes d'équations $y = f(x)$ et $y = f^{-1}(x)$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice.

5.2 Fonctions circulaires inverses

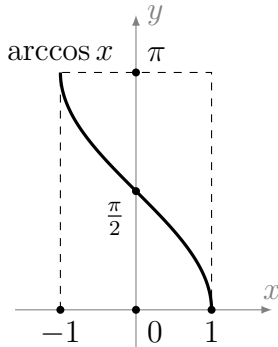
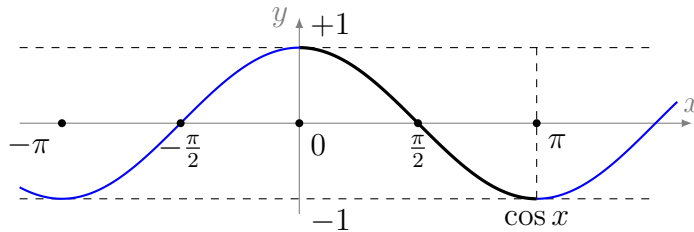
5.2.1 Arccosinus

Considérons la fonction cosinus $\cos : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$, $x \mapsto \cos x$. Pour obtenir une bijection à partir de cette fonction, il faut considérer la restriction de cosinus à l'intervalle $[0, \pi]$. Sur cet intervalle la fonction cosinus est continue et strictement décroissante, donc la restriction

$$\cos|_{[0, \pi]} : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$$

est une bijection. Sa bijection réciproque est la fonction arccosinus :

$$\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$$



On a donc, par définition de la bijection réciproque :

$$\cos(\arccos(x)) = x \quad \forall x \in [-1, 1]$$

$$\arccos(\cos(x)) = x \quad \forall x \in [0, \pi]$$

Autrement dit :

$$\text{Si } x \in [0, \pi] \quad \cos(x) = y \iff x = \arccos y$$

Terminons avec la dérivée de arccos :

$$\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall x \in]-1, 1[$$

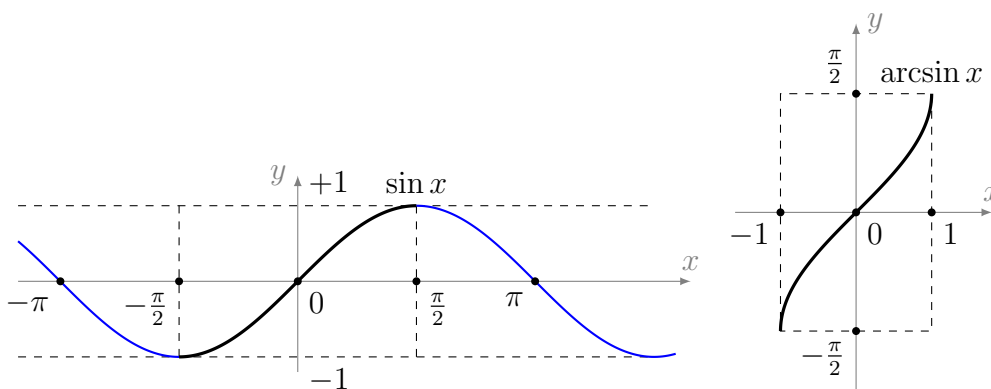
5.2.2 Arcsinus

La restriction

$$\sin| : \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$$

est une bijection. Sa bijection réciproque est la fonction arcsinus :

$$\arcsin : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$$



$$\sin(\arcsin(x)) = x \quad \forall x \in [-1, 1]$$

$$\arcsin(\sin(x)) = x \quad \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$$

$$\text{Si } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right] : \quad \sin(x) = y \iff x = \arcsin y.$$

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall x \in]-1, 1[.$$

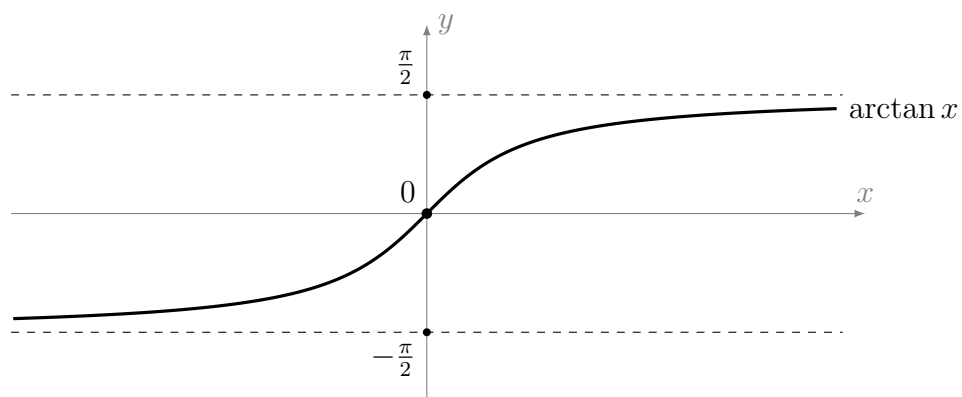
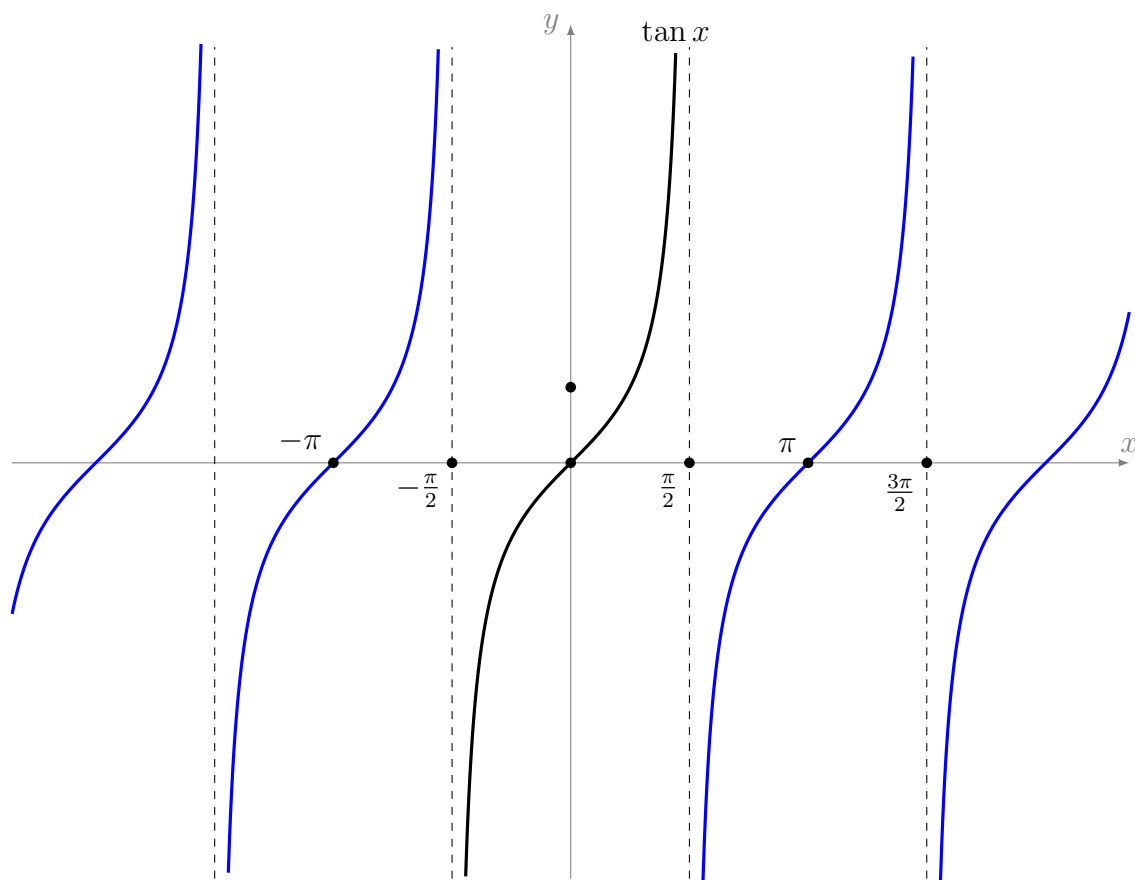
5.2.3 Arctangente

La restriction

$$\tan| : \left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[\rightarrow \mathbb{R}$$

est une bijection. Sa bijection réciproque est la fonction arctangente :

$$\arctan : \mathbb{R} \rightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$$



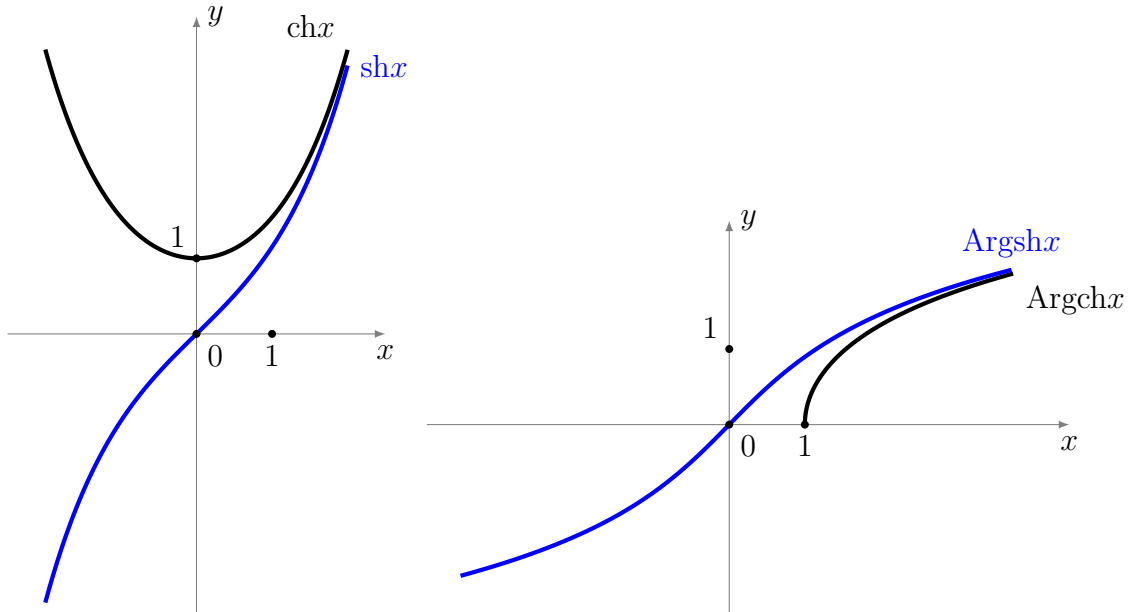
$$\begin{aligned} \tan(\arctan(x)) &= x \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ \arctan(\tan(x)) &= x \quad \forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\\ \text{Si } x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[: \quad \tan(x) = y &\iff x = \arctan y. \\ \arctan'(x) &= \frac{1}{1+x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

5.3 Fonctions hyperboliques et hyperboliques inverses

5.3.1 Cosinus hyperbolique et son inverse

Pour $x \in \mathbb{R}$, le cosinus hyperbolique est : $\operatorname{ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

La restriction $\operatorname{ch}|_{[0, +\infty[} : [0, +\infty[\rightarrow [1, +\infty[$ est une bijection. Sa bijection réciproque est $\operatorname{Argch} : [1, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$.



5.3.2 Sinus hyperbolique et son inverse

Pour $x \in \mathbb{R}$, le sinus hyperbolique est : $\operatorname{sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

$\operatorname{sh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, dérivable, strictement croissante vérifiant $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{sh}x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{sh}x = +\infty$, c'est donc une bijection. Sa bijection réciproque est $\operatorname{Argsh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Proposition 44 .

1. $\operatorname{ch}^2x - \operatorname{sh}^2x = 1$
2. $\operatorname{ch}'x = \operatorname{sh}x$, $\operatorname{sh}'x = \operatorname{ch}x$

3. $\text{Argsh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est strictement croissante et continue.

4. Argsh est dérivable et $\text{Argsh}'x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

5. $\text{Argsh}x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$

Preuve 8

1. $\text{ch}^2x - \text{sh}^2x = \frac{1}{4}[(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2] = \frac{1}{4}[(e^{2x} + 2 + e^{-2x}) - (e^{2x} - 2 + e^{-2x})] = 1$.

2. $\frac{d}{dx}(\text{ch}x) = \frac{d}{dx} \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \text{sh}x$. Idem pour la dérivée de $\text{sh}x$.

3. Car c'est la réciproque de sh .

4. Comme la fonction $x \mapsto \text{sh}'x$ ne s'annule pas sur \mathbb{R} alors la fonction Argsh est dérivable sur \mathbb{R} . On calcule la dérivée par dérivation de l'égalité $\text{sh}(\text{Argsh}x) = x$:

$$\text{Argsh}'x = \frac{1}{\text{ch}(\text{Argsh}x)} = \frac{1}{\sqrt{\text{sh}^2(\text{Argsh}x) + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

5. Notons $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ alors

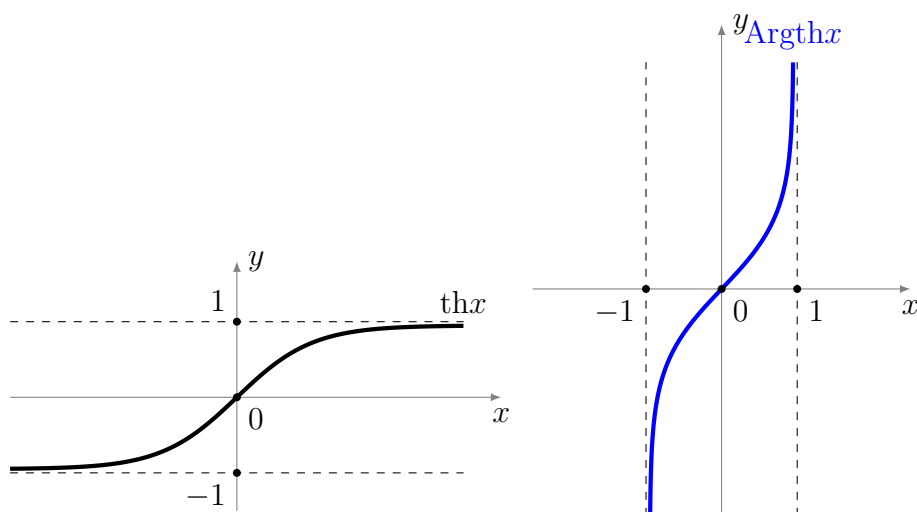
$$f'(x) = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \text{Argsh}'x$$

Comme de plus $f(0) = \ln(1) = 0$ et $\text{Argsh}0 = 0$ (car $\text{sh}0 = 0$), on en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \text{Argsh}x$.

5.3.3 Tangente hyperbolique et son inverse

Par définition la tangente hyperbolique est : $\tanh x = \frac{\text{sh}x}{\text{ch}x}$.

La fonction $\tanh : \mathbb{R} \rightarrow]-1, 1[$ est une bijection, on note $\text{Argth} :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ sa bijection réciproque.



5.3.4 Trigonométrie hyperbolique

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$$

$$\operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{cha} \cdot \operatorname{chb} + \operatorname{sha} \cdot \operatorname{shb}$$

$$\operatorname{ch}(2a) = \operatorname{ch}^2 a + \operatorname{sh}^2 a = 2 \operatorname{ch}^2 a - 1 = 1 + 2 \operatorname{sh}^2 a$$

$$\operatorname{sh}(a+b) = \operatorname{sha} \cdot \operatorname{chb} + \operatorname{shb} \cdot \operatorname{cha}$$

$$\operatorname{sh}(2a) = 2 \operatorname{sha} \cdot \operatorname{cha}$$

$$\operatorname{tanh}(a+b) = \frac{\operatorname{tanh} a + \operatorname{tanh} b}{1 + \operatorname{tanh} a \cdot \operatorname{tanh} b}$$

$$\operatorname{ch}'x = \operatorname{sh}x$$

$$\operatorname{sh}'x = \operatorname{ch}x$$

$$\operatorname{tanh}'x = 1 - \operatorname{tanh}^2 x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$$

$$\operatorname{Argch}'x = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \quad (x > 1)$$

$$\operatorname{Argsh}'x = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\operatorname{Argth}'x = \frac{1}{1 - x^2} \quad (|x| < 1)$$

$$\operatorname{Argch}x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad (x \geq 1)$$

$$\operatorname{Argsh}x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \quad (x \in \mathbb{R})$$

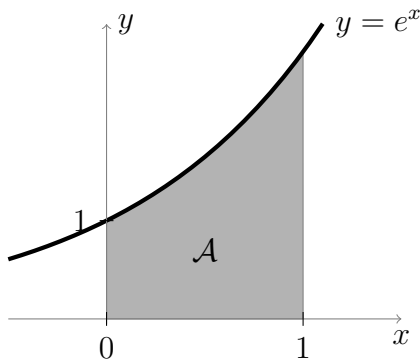
$$\operatorname{Argth}x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad (-1 < x < 1)$$

Chapitre 6

Intégration de fonctions réelles

6.1 Introduction

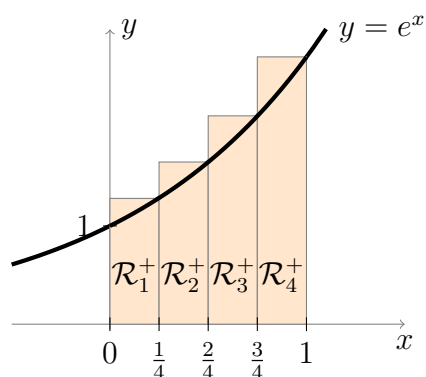
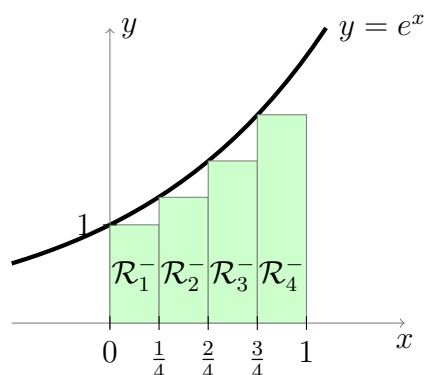
Nous allons introduire l'intégrale à l'aide d'un exemple. Considérons la fonction exponentielle $f(x) = e^x$. On souhaite calculer l'aire \mathcal{A} en-dessous du graphe de f et entre les droites d'équation $(x = 0)$, $(x = 1)$ et l'axe (Ox) .



Nous approchons cette aire par des sommes d'aires des rectangles situés sous la courbe. Plus précisément, soit $n \geq 1$ un entier ; découpons notre intervalle $[0, 1]$ à l'aide de la subdivision $(0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{i}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1)$.

On considère les « rectangles inférieurs » \mathcal{R}_i^- , chacun ayant pour base l'intervalle $[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$ et pour hauteur $f(\frac{i-1}{n}) = e^{(i-1)/n}$. L'entier i varie de 1 à n .

L'aire de \mathcal{R}_i^- est « base \times hauteur » : $(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n}) \times e^{(i-1)/n} = \frac{1}{n} e^{\frac{i-1}{n}}$.



La somme des aires des \mathcal{R}_i^- se calcule alors comme somme d'une suite géométrique :

$$\sum_{i=1}^n \frac{e^{\frac{i-1}{n}}}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(e^{\frac{1}{n}}\right)^{i-1} = \frac{1}{n} \frac{1 - \left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n}{1 - e^{\frac{1}{n}}} = \frac{\frac{1}{n}}{e^{\frac{1}{n}} - 1} (e - 1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e - 1.$$

Pour la limite on a reconnu l'expression du type $\frac{e^x - 1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$ (avec ici $x = \frac{1}{n}$).

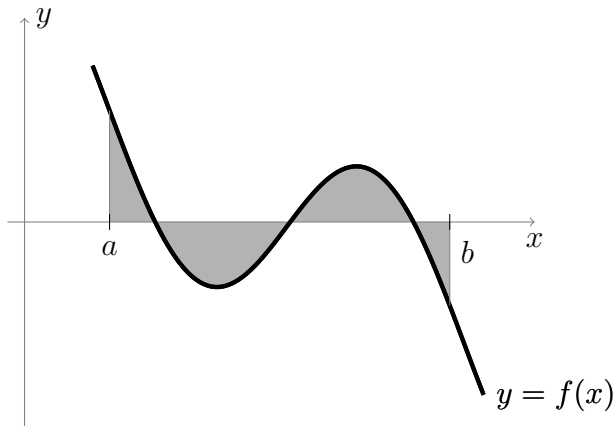
Soit maintenant les « rectangles supérieurs » \mathcal{R}_i^+ , ayant la même base $\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$ mais la hauteur $f\left(\frac{i}{n}\right) = e^{i/n}$. Un calcul similaire montre que $\sum_{i=1}^n \frac{e^{\frac{i}{n}}}{n} \rightarrow e - 1$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

L'aire \mathcal{A} de notre région est supérieure à la somme des aires des rectangles inférieurs ; et elle est inférieure à la somme des aires des rectangles supérieurs. Lorsque l'on considère des subdivisions de plus en plus petites (c'est-à-dire lorsque l'on fait tendre n vers $+\infty$) alors on obtient à la limite que l'aire \mathcal{A} de notre région est encadrée par deux aires qui tendent vers $e - 1$. Donc l'aire de notre région est $\mathcal{A} = e - 1$.

6.2 L'intégrale de Riemann

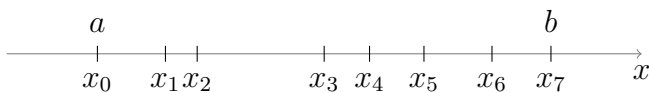
Nous allons reprendre la construction faite dans l'introduction pour une fonction f quelconque. Ce qui va remplacer les rectangles seront des fonctions en escalier.

Si la limite des aires en-dessous égale la limite des aires au-dessus on appelle cette limite commune l'intégrale de f que l'on note $\int_a^b f(x) dx$. Cependant il n'est pas toujours vrai que ces limites soient égales, l'intégrale n'est donc définie que pour les fonctions intégrables. Heureusement nous verrons que si la fonction f est continue alors elle est intégrable.



6.2.1 Intégrale d'une fonction en escalier

Définition 42 Soit $[a, b]$ un intervalle fermé borné de \mathbb{R} ($-\infty < a < b < +\infty$). On appelle une subdivision de $[a, b]$ une suite finie, strictement croissante, de nombres $\mathcal{S} = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ telle que $x_0 = a$ et $x_n = b$. Autrement dit $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$.

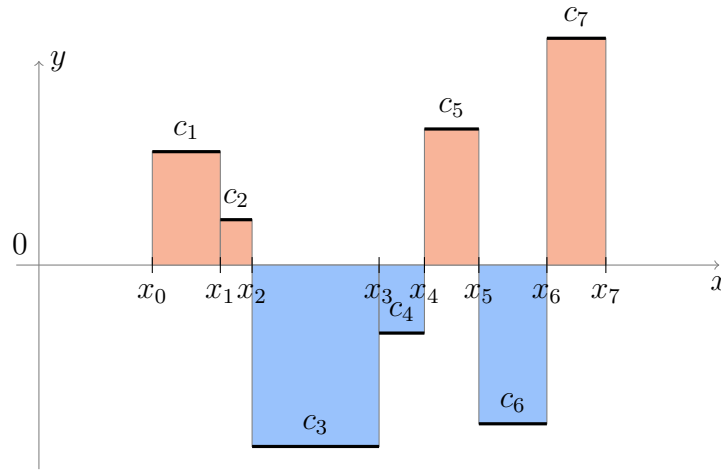


Définition 43 Une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction en escalier s'il existe une subdivision (x_0, x_1, \dots, x_n) et des nombres réels c_1, \dots, c_n tels que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ on ait

$$\forall x \in]x_{i-1}, x_i[\quad f(x) = c_i$$

Autrement dit f est une fonction constante sur chacun des sous-intervalles de la subdivision.

Remarque 2 La valeur de f aux points x_i de la subdivision n'est pas imposée. Elle peut être égale à celle de l'intervalle qui précède ou de celui qui suit, ou encore une autre valeur arbitraire. Cela n'a pas d'importance car l'aire ne changera pas.



Définition 44 Pour une fonction en escalier comme ci-dessus, son intégrale

est le réel $\int_a^b f(x) dx$ défini par
$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n c_i(x_i - x_{i-1})$$

Remarque 3 Notez que chaque terme $c_i(x_i - x_{i-1})$ est l'aire du rectangle compris entre les abscisses x_{i-1} et x_i et de hauteur c_i . Il faut juste prendre garde que l'on compte l'aire avec un signe « + » si $c_i > 0$ et un signe « - » si $c_i < 0$.

6.2.2 Fonction intégrable

Rappelons qu'une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est bornée s'il existe $M \geq 0$ tel que :

$$\forall x \in [a, b] \quad -M \leq f(x) \leq M.$$

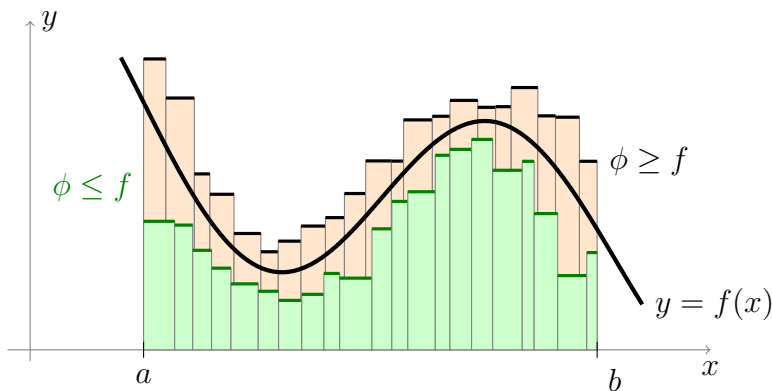
Rappelons aussi que si l'on a deux fonctions $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, alors on note

$$f \leq g \quad \iff \quad \forall x \in [a, b] \quad f(x) \leq g(x).$$

On suppose à présent que $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction bornée quelconque. On définit deux nombres réels :

$$I^-(f) = \sup \left\{ \int_a^b \phi(x) dx \mid \phi \text{ en escalier et } \phi \leq f \right\}$$

$$I^+(f) = \inf \left\{ \int_a^b \phi(x) dx \mid \phi \text{ en escalier et } \phi \geq f \right\}$$



Pour $I^-(f)$ on prend toutes les fonctions en escalier (avec toutes les subdivisions possibles) qui restent inférieures à f . On prend l'aire la plus grande parmi toutes ces fonctions en escalier, comme on n'est pas sûr que ce maximum existe on prend la borne supérieure. Pour $I^+(f)$ c'est le même principe mais les fonctions en escalier sont supérieures à f et on cherche l'aire la plus petite possible.

Il est intuitif que l'on a : $I^-(f) \leq I^+(f)$.

Définition 45 Une fonction bornée $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est dite intégrable (au sens de Riemann) si $I^-(f) = I^+(f)$. On appelle alors ce nombre l'intégrale de Riemann de f sur $[a, b]$ et on le note $\int_a^b f(x) dx$.

Exemple 39 — Les fonctions en escalier sont intégrables! En effet si f est une fonction en escalier alors la borne inférieure $I^-(f)$ et supérieure $I^+(f)$ sont atteintes avec la fonction $\phi = f$.

— Cependant toutes les fonctions ne sont pas intégrables. La fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1$ si x est rationnel et $f(x) = 0$ sinon, n'est pas intégrable sur $[0, 1]$. Convincez-vous que si ϕ est une fonction en escalier avec $\phi \leq f$ alors $\phi \leq 0$ et que si $\phi \geq f$ alors $\phi \geq 1$. On en

déduit que $I^-(f) = 0$ et $I^+(f) = 1$. Les bornes inférieure et supérieure ne coïncident pas, donc f n'est pas intégrable.

Exemple 40 Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Montrons qu'elle est intégrable et calculons $\int_0^1 f(x) dx$.

6.2.3 Premières propriétés

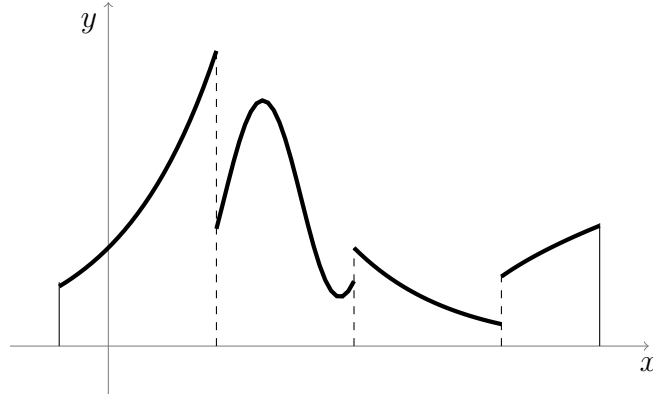
Proposition 45 1. Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est intégrable et si l'on change les valeurs de f en un nombre fini de points de $[a, b]$ alors la fonction f est toujours intégrable et la valeur de l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$ ne change pas.

2. Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est intégrable alors la restriction de f à tout intervalle $[a', b'] \subset [a, b]$ est encore intégrable.

6.2.4 Les fonctions continues sont intégrables

Théorème 19 Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue alors f est intégrable.

Une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est dite continue par morceaux s'il existe un entier n et une subdivision (x_0, \dots, x_n) telle que $f|_{]x_{i-1}, x_i[}$ soit continue, admette une limite finie à droite en x_{i-1} et une limite à gauche en x_i pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.



Corollaire 4 Les fonctions continues par morceaux sont intégrables.

Théorème 20 Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est monotone alors f est intégrable.

Théorème 21 Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe \mathcal{C}^1 alors f est intégrable.

6.2.5 Sommes de Riemann

L'intégrale est définie à partir de limites de sommes. Mais maintenant que nous savons calculer des intégrales sans utiliser ces sommes on peut faire le cheminement inverse : calculer des limites de sommes à partir d'intégrales.

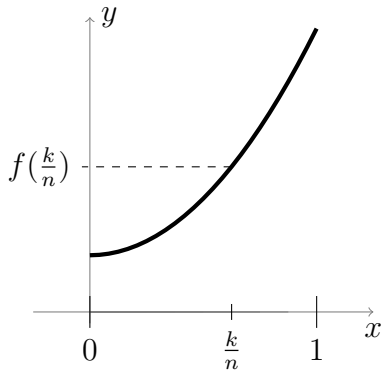
Théorème 22 Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable, alors

$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$$

La somme S_n s'appelle la somme de Riemann associée à l'intégrale et correspond à une subdivision régulière de l'intervalle $[a, b]$ en n petits intervalles. La hauteur de chaque rectangle étant évaluée à son extrémité droite.

Le cas le plus utile est le cas où $a = 0$, $b = 1$ alors $\frac{b-a}{n} = \frac{1}{n}$ et $f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) = f\left(\frac{k}{n}\right)$ et ainsi

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(x) dx$$



Exemple 41 Calculer la limite de la somme $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$.

6.3 Propriétés de l'intégrale

6.3.1 Relation de Chasles

Proposition 46 (Relation de Chasles) Soient $a < c < b$. Si f est intégrable sur $[a, c]$ et $[c, b]$, alors f est intégrable sur $[a, b]$. Et on a

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Pour s'autoriser des bornes sans se préoccuper de l'ordre on définit :

$$\int_a^a f(x) dx = 0 \quad \text{et pour } a < b \quad \int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx.$$

Pour a, b, c quelconques la relation de Chasles devient alors $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$

6.3.2 Positivité de l'intégrale

Proposition 47 (Positivité de l'intégrale) Soit $a \leq b$ deux réels et f et g deux fonctions intégrables sur $[a, b]$.

$$\text{Si } f \leq g \quad \text{alors} \quad \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

En particulier l'intégrale d'une fonction positive est positive : Si $f \geq 0$ alors $\int_a^b f(x) dx \geq 0$

6.3.3 Linéarité de l'intégrale

Proposition 48 Soient f, g deux fonctions intégrables sur $[a, b]$.

- $f + g$ est une fonction intégrable et $\int_a^b (f + g)(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$.
- Pour tout réel λ , λf est intégrable et on a $\int_a^b \lambda f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx$.
Par ces deux premiers points nous avons la linéarité de l'intégrale : pour tous réels λ, μ $\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x)) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx + \mu \int_a^b g(x) dx$

3. $f \times g$ est une fonction intégrable sur $[a, b]$ mais en général

$$\int_a^b (fg)(x) dx \neq \left(\int_a^b f(x) dx \right) \left(\int_a^b g(x) dx \right)$$

4. $|f|$ est une fonction intégrable sur $[a, b]$ et $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$

Exemple 42 Soit $I_n = \int_1^n \frac{\sin(nx)}{1+x^n} dx$. Montrons que $I_n \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Remarque 4 Notez que même si $f \times g$ est intégrable on a en général $\int_a^b (fg)(x) dx \neq \left(\int_a^b f(x) dx \right) \left(\int_a^b g(x) dx \right)$. Par exemple, soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = 1$ si $x \in [0, \frac{1}{2}[$ et $f(x) = 0$ sinon. Soit $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x) = 1$ si $x \in [\frac{1}{2}, 1[$ et $g(x) = 0$ sinon. Alors $f(x) \times g(x) = 0$ pour tout $x \in [0, 1]$ et donc $\int_0^1 f(x)g(x) dx = 0$ alors que $\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2}$ et $\int_0^1 g(x) dx = \frac{1}{2}$.

6.4 Primitive d'une fonction

Définition 46 Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I quelconque. On dit que $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une primitive de f sur I si F est une fonction dérivable sur I vérifiant $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$.

Proposition 49 Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et soit $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ une primitive de f . Toute primitive de f s'écrit $G = F + c$ où $c \in \mathbb{R}$.

Proposition 50 Soient F une primitive de f et G une primitive de g . Alors $F + G$ est une primitive de $f + g$. Et si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors λF est une primitive de λf .

Une autre formulation est de dire que pour tous réels λ, μ on a
$$\int (\lambda f(t) + \mu g(t)) dt = \lambda \int f(t) dt + \mu \int g(t) dt$$

6.4.1 Primitives des fonctions usuelles

$\int e^x dx = e^x + c$	sur \mathbb{R}
$\int \cos x dx = \sin x + c$	sur \mathbb{R}
$\int \sin x dx = -\cos x + c$	sur \mathbb{R}
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	$(n \in \mathbb{N})$ sur \mathbb{R}
$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$	$(\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$ sur $]0, +\infty[$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$	sur $]0, +\infty[$ ou $]-\infty, 0[$

$\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + c$, $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + c$	sur \mathbb{R}
$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + c$	sur \mathbb{R}
$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + c \\ \frac{\pi}{2} - \arccos x + c \end{cases}$	sur $] -1, 1[$
$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \begin{cases} \operatorname{Argsh} x + c \\ \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + c \end{cases}$	sur \mathbb{R}
$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \begin{cases} \operatorname{Argch} x + c \\ \ln(x + \sqrt{x^2-1}) + c \end{cases}$	sur $x \in]1, +\infty[$

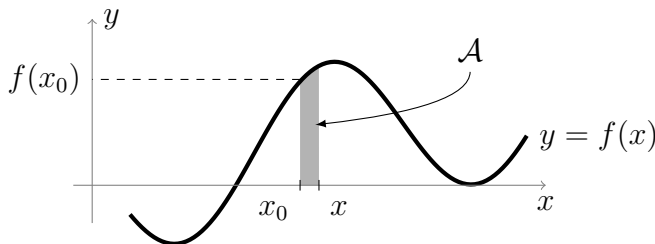
6.4.2 Relation primitive-intégrale

Théorème 23 Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. La fonction $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ est une primitive de f , c'est-à-dire F est dérivable et $F'(x) = f(x)$.

Par conséquent pour une primitive F quelconque de $f : \int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$

Notation. On note $[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

Essayons de visualiser pourquoi la fonction F est dérivable et $F'(x) = f(x)$.



Fixons $x_0 \in [a, b]$. Par la relation de Chasles nous savons :

$$F(x) - F(x_0) = \int_a^x f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt = \int_{x_0}^a f(t) dt + \int_a^x f(t) dt = \int_{x_0}^x f(t) dt$$

Donc le taux d'accroissement

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(t) dt = \frac{\mathcal{A}}{x - x_0}$$

où \mathcal{A} est l'aire hachurée. Mais cette aire est presque un rectangle, si x est suffisamment proche de x_0 , donc l'aire \mathcal{A} vaut environ $(x - x_0) \times f(x_0)$; lorsque $x \rightarrow x_0$ le taux d'accroissement tend donc vers $f(x_0)$. Autrement dit $F'(x_0) = f(x_0)$.

6.5 Formules de la moyenne

6.5.1 Première formule de la moyenne

f et g étant deux fonctions intégrables sur $[a; b]$. On suppose de plus que g est positive sur $[a; b]$. Si on note

$$m = \inf_{x \in [a; b]} f(x) \quad ; \quad M = \sup_{x \in [a; b]} f(x)$$

alors on a

$$m \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b g(x) f(x) dx \leq M \int_a^b g(x) dx.$$

Si de plus f est continue sur $[a; b]$, on a la proposition suivante :

Proposition 51 Soit f une fonction continue sur $[a; b]$, g intégrable sur $[a; b]$. On suppose $g \geq 0$. Alors il existe $c \in [a; b]$, tel que :

$$\int_a^b g(x) f(x) dx = f(c) \int_a^b g(x) dx.$$

Preuve 9 Pour le premier point, il suffit de partir de la double inégalité

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$$

et de passer aux intégrales. Le deuxième point est une conséquence du théorème de la valeur intermédiaire. On considère la fonction F définie par

$$F(x) = f(x) \int_a^b g(x) dx.$$

D'après le premier point, $\int_a^b g(x) f(x) dx$ est une valeur intermédiaire pour la fonction F . On en déduit l'existence d'un élément $c \in [a; b]$ vérifiant les bonnes conclusions.

6.5.2 Deuxième formule de la moyenne

Proposition 52 Soient f et g deux fonctions intégrables sur $[a; b]$, on suppose que f est positive et décroissante sur $[a; b]$ et on note $f(a_+)$ la limite à droite de f en a . Alors il existe un point $c \in [a; b]$ tel que

$$\int_a^b g(x) f(x) dx = f(a_+) \int_a^c g(x) dx.$$

Remarque 5 Si f est continue sur $[a; b]$, alors $f(a_+) = f(a)$.

Démonstration : On procède en deux étapes. Supposons d'abord la fonction f en escalier, il existe donc une subdivision $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ de $[a; b]$ et des constantes $c_1; \dots; c_n$ telles que

$$f(x) = c_i; \forall x \in]x_{i-1}; x_i[; \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n$$

Notons

$$G(t) = \int_a^t g(x)dx,$$

on va montrer que $\int_a^b g(x)f(x)dx$ est une valeur intermédiaire pour la fonction $H(t) = f(a_+)G(t)$. On a

$$\int_a^b g(x)f(x)dx = \sum_{i=1}^n c_i [(G(x_i) - G(x_{i-1}))].$$

L'idée est de factoriser non pas par les c_i mais par les $G(x_i)$. On peut écrire :

$$\sum_{i=1}^n c_i [(G(x_i) - G(x_{i-1}))] = \sum_{i=1}^{n-1} G(x_i)(c_i - c_{i+1}) + c_n G(x_n) + c_1 G(x_0)$$

Si on note m et M respectivement l'inf et le sup de la fonction G sur $[a; b]$, alors

$$mc_1 \leq \sum_{i=1}^n c_i [(G(x_i) - G(x_{i-1}))] \leq Mc_1$$

c_1 étant bien entendu la limite à droite de f en a . Nous avons donc bien prouvé que $\int_a^b g(x)f(x)dx$ est une valeur intermédiaire de la fonction H . La conclusion découle aisément.

Maintenant, si f n'est pas en escalier, on considère la subdivision usuelle de $[a; b]$, $x_i = a + i\frac{b-a}{n}$ pour $0 \leq i \leq n$ et les deux fonctions en escalier h_n et f_n définies par

$$h_n(x) = f(x_i); \quad f_n(x) = f(x_{i+1}) \quad \text{si } x \in]x_i; x_{i+1}[.$$

Nous allons établir que $\int_a^b h_n(x)g(x)dx$ tend vers $\int_a^b g(x)f(x)dx$ et le fait que $\int_a^b f(x)dx$ soit une valeur intermédiaire résultera de la même propriété

pour h_n qui est cette fois-ci en escalier. Plus précisément, on a : $f_n \leq f \leq h_n$; et par suite

$$\int_a^b (f - f_n)(x)dx \leq \int_a^b (h_n - f_n)(x)dx = \frac{b-a}{n} (f(a) - f(b)).$$

Si on note k un majorant de $|g|$ sur $[a; b]$, alors

$$\left| \int_a^b [f(x)g(x) - f_n(x)g(x)] dx \right| \leq k \int_a^b (f - f_n)(x)dx \leq k \frac{b-a}{n} (f(a) - f(b)).$$

La limite à droite de a pour la fonction f_n étant égale à la limite à droite de a pour la fonction f , par passage à la limite, on aura bien

$$mf(a_+) \leq \int_a^b g(x)f(x)dx \leq Mf(a_+)$$

6.6 Primitives et intégrales

6.6.1 Intégrale indéfinie

Soit f une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, on dit que f est localement intégrable sur I si f est intégrable sur tout intervalle fermé borné contenu dans I . Fixons $\alpha \in I$, ce qui précède nous permet de considérer la fonction de $I \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \int_\alpha^x f(t)dt$. On parlera d'intégrale indéfinie.

On remarquera que deux intégrales indéfinies diffèrent d'une constante et que si F est une intégrale indéfinie, on a :

$$\int_u^v f(t)dt = F(u) - F(v) = [F(t)]_u^v; \quad u, v \in I$$

On a les propriétés suivantes :

Proposition 53 Toute intégrale indéfinie F associée à une fonction localement intégrable sur I , est continue sur I

Proposition 54 Si f est continue sur I intervalle de \mathbb{R} , elle admet des primitives et elles sont toutes de la forme

une intégrale indéfinie quelconque + une constante

6.7 Intégration par parties – Changement de variable

6.7.1 Intégration par parties

Théorème 24 Soient u et v deux fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur un intervalle $[a, b]$.

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = [uv]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx$$

Notation. Le crochet $[F]_a^b$ est par définition $[F]_a^b = F(b) - F(a)$. Donc $[uv]_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a)$. Si l'on omet les bornes alors $[F]$ désigne la fonction $F + c$ où c est une constante quelconque.

La formule d'intégration par parties pour les primitives est la même mais sans les bornes :

$$\int u(x)v'(x) dx = [uv] - \int u'(x)v(x) dx.$$

Exemple 43 Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int \arcsin x dx$.
2. $\int x^2 e^x dx$.

6.7.2 Changement de variable

Théorème 25 Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $\varphi : J \rightarrow I$ une bijection de classe \mathcal{C}^1 . Pour tout $a, b \in J$ $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx = \int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt$

Si F est une primitive de f alors $F \circ \varphi$ est une primitive de $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$.

Voici un moyen simple de s'en souvenir. En effet si l'on note $x = \varphi(t)$ alors par dérivation on obtient $\frac{dx}{dt} = \varphi'(t)$ donc $dx = \varphi'(t) dt$. D'où la substitution $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx = \int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$.

Exemple 44 1. Calculer la primitive de $F = \int \tan t dt$.

2. Calculer $\int_0^{1/2} \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}} dx$.

6.8 Intégration des fractions rationnelles

Pour calculer une intégrale de la forme $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ où P et Q deux polynômes réels, il faut procéder à la décomposition de $\frac{P(x)}{Q(x)}$ (qu'on appelle fraction rationnelle) en éléments simples à intégrer.

La méthode est la suivante :

• D'abord on détermine les racines x_1, x_2, \dots, x_r de la fonction polynôme Q et on l'écrit sous la forme

$$Q(x) = A(x - x_1)^{n_1}(x - x_2)^{n_2} \dots ((x - x_r)^{n_r})(x^2 + p_1x + q_1)^{m_1} \dots (x^2 + p_sx + q_s)^{m_s}$$

où les polynômes de degré 2 n'ont pas de racines réelles.

• La fonction $\frac{P(x)}{Q(x)}$ se décompose en une somme d'éléments de trois types :

1. une partie polynomiale $E(x)$ qu'on appelle partie entière (si $\deg P > \deg Q$).
2. Des éléments dits de première espèce du type : $\frac{\alpha_i}{(x - x_i)^{k_i}}$ où $k_i = 1, 2, \dots, n_i$ ($i = 1, 2, \dots, r$).
3. Des éléments dits de deuxième espèce du type : $\frac{a_jx + b_j}{(x^2 + p_jx + q_j)^{l_j}}$ où $l_j = 1, 2, \dots, m_j$ ($j = 1, \dots, s$).

Exemple 45 Calculer les intégrales suivantes :

$$1. I = \int \frac{x^3 + 1}{x^2 - x - 2} dx$$

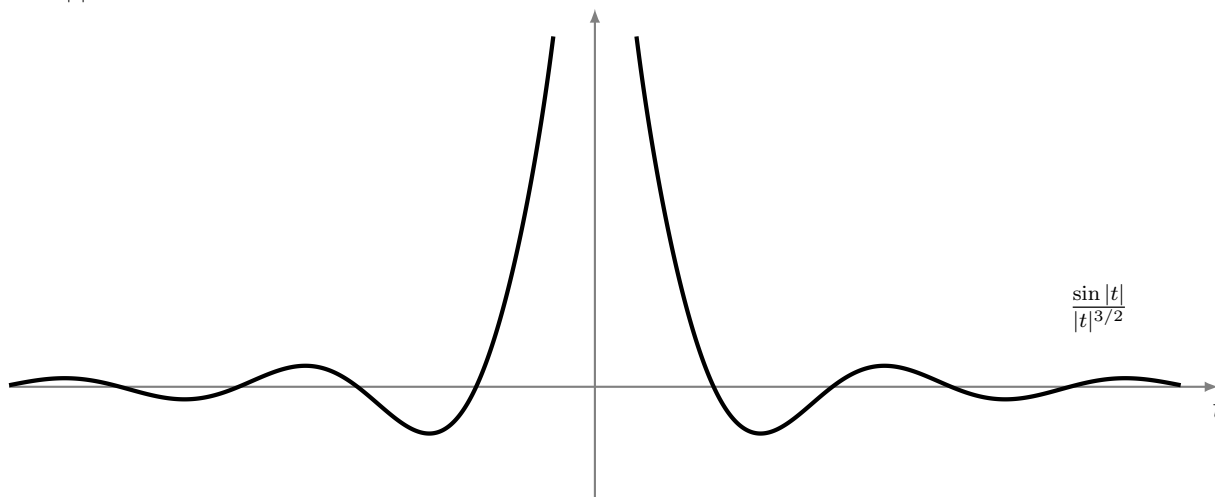
$$2. J = \int \frac{8x + 6}{(x - 2)^3} dx$$

6.9 Notions sur les intégrales généralisées

La plupart des intégrales que vous rencontrerez ne sont pas des aires de domaines bornés du plan. Nous allons apprendre à calculer les intégrales de domaines non bornés, soit parce que l'intervalle d'intégration est infini (allant jusqu'à $+\infty$ ou $-\infty$), soit parce que la fonction à intégrer tend vers l'infini aux bornes de l'intervalle.

6.9.1 Points incertains

Considérons par exemple la fonction f qui à $t \in]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ associe $f(t) = \frac{\sin |t|}{|t|^{3/2}}$. Comment donner un sens à l'intégrale de f sur \mathbb{R} ?



- On commence d'abord par identifier les points incertains, soit $+\infty$, soit $-\infty$ d'une part, et d'autre part le ou les points au voisinage desquels la fonction n'est pas bornée ($t = 0$ dans notre exemple).
- On découpe ensuite chaque intervalle d'intégration en autant d'intervalles qu'il faut pour que chacun d'eux ne contienne qu'un seul point incertain, placé à l'une des deux bornes.
- Nous souhaitons une définition qui respecte la relation de Chasles. Ainsi l'intégrale sur l'intervalle complet est la somme des intégrales sur les intervalles du découpage.
- Dans l'exemple de la fonction $f(t) = \frac{\sin |t|}{|t|^{3/2}}$ ci-dessus, il faut découper les deux intervalles de définition $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ en 4 sous-intervalles : 2 pour isoler $-\infty$ et $+\infty$, et 2 autres pour le point incertain 0.
- On pourra écrire pour cet exemple :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \int_{-\infty}^{-1} f(t) dt + \int_{-1}^0 f(t) dt + \int_0^1 f(t) dt + \int_1^{+\infty} f(t) dt .$$

- Le seul but est d'isoler les difficultés : les choix de -1 et 1 comme points de découpage sont arbitraires (par exemple -3 et 10 auraient convenu tout aussi bien).

6.9.2 Convergence/divergence

Par ce découpage, et par changement de variable $t \mapsto -t$, on se ramène à des intégrales de deux types.

1. Intégrale sur $[a, +\infty[$.
2. Intégrale sur $]a, b]$, avec la fonction non bornée en a .

Nous devons donc définir une intégrale, appelée *intégrale impropre*, dans ces deux cas.

Définition 47 1. Soit f une fonction continue sur $[a, +\infty[$. On dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge si la limite, lorsque x tend vers $+\infty$, de la primitive $\int_a^x f(t) dt$ existe et est finie. Si c'est le cas, on pose :

$$\int_a^{+\infty} f(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t) dt . \quad (6.1)$$

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale diverge.

2. Soit f une fonction continue sur $]a, b]$. On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ converge si la limite à droite, lorsque x tend vers a , de $\int_x^b f(t) dt$ existe et est finie. Si c'est le cas, on pose :

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{x \rightarrow a^+} \int_x^b f(t) dt . \quad (6.2)$$

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale diverge.

Remarque 6 — Convergence équivaut donc à limite finie. Divergence signifie soit qu'il n'y a pas de limite, soit que la limite est infinie.

— Observons que la deuxième définition est cohérente avec l'intégrale d'une fonction qui serait continue sur $[a, b]$ tout entier (au lieu de $]a, b]$). On sait que la primitive $\int_x^b f(t) dt$ est une fonction continue. Par conséquent, l'intégrale usuelle $\int_a^b f(t) dt$ est aussi la limite de $\int_x^b f(t) dt$ (lorsque $x \rightarrow a^+$). Dans ce cas, les deux intégrales coïncident.

6.9.3 Exemples

Quand on peut calculer une primitive $F(x)$ de la fonction à intégrer (par exemple $F(x) = \int_a^x f(t) dt$), l'étude de la convergence se ramène à un calcul de limite de $F(x)$. Voici plusieurs exemples.

Exemple 46 *L'intégrale*

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt \quad \text{converge.}$$

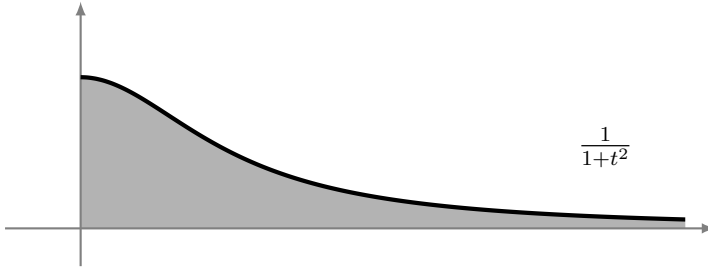
En effet,

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \left[\arctan t \right]_0^x = \arctan x \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}.$$

On pourra écrire :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = \left[\arctan t \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2},$$

à condition de se souvenir que $\left[\arctan t \right]_0^{+\infty}$ désigne une limite en $+\infty$.



Cela prouve que le domaine sous la courbe n'est pas borné, mais cependant son aire est finie !

Exemple 47 *Par contre, l'intégrale*

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t} dt \quad \text{diverge.}$$

En effet,

$$\int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \left[\ln(1+t) \right]_0^x = \ln(1+x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+x) = +\infty.$$

6.9.4 Relation de Chasles

Lorsqu'elle converge, cette nouvelle intégrale vérifie les mêmes propriétés que l'intégrale de Riemann usuelle, à commencer par la relation de Chasles :

Proposition 55 (Relation de Chasles) Soit $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et soit $a' \in [a, +\infty[$. Alors les intégrales impropres $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ et $\int_{a'}^{+\infty} f(t) dt$ sont de même nature. Si elles convergent, alors $\int_a^{+\infty} f(t) dt = \int_a^{a'} f(t) dt + \int_{a'}^{+\infty} f(t) dt$.

« Être de même nature » signifie que les deux intégrales sont convergentes en même temps ou bien divergentes en même temps.

Le relation de Chasles implique donc que la convergence ne dépend pas du comportement de la fonction sur des intervalles bornés, mais seulement de son comportement au voisinage de $+\infty$.

Preuve 10 La preuve découle de la relation de Chasles pour les intégrales usuelles, avec $a \leq a' \leq x$:

$$\int_a^x f(t) dt = \int_a^{a'} f(t) dt + \int_{a'}^x f(t) dt .$$

Puis on passe à la limite (lorsque $x \rightarrow +\infty$).

Bien sûr, si on est dans le cas d'une fonction continue $f :]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ avec $b' \in]a, b]$, alors on a un résultat similaire, et en cas de convergence :

$$\int_a^{b'} f(t) dt = \int_a^{b'} f(t) dt + \int_{b'}^b f(t) dt .$$

Dans ce cas la convergence de l'intégrale ne dépend pas de b , mais seulement du comportement de f au voisinage de a .

6.9.5 Linéarité

Proposition 56 (Linéarité de l'intégrale) Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, +\infty[$, et λ, μ deux réels. Si les intégrales $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ et $\int_a^{+\infty} g(t) dt$ convergent, alors $\int_a^{+\infty} (\lambda f(t) + \mu g(t)) dt$ converge et

$$\int_a^{+\infty} (\lambda f(t) + \mu g(t)) dt = \lambda \int_a^{+\infty} f(t) dt + \mu \int_a^{+\infty} g(t) dt .$$

Les mêmes relations sont valables pour les fonctions d'un intervalle $]a, b]$, non bornées en a .

Remarque : la réciprocity dans la linéarité est fautive, il est possible de trouver deux fonctions f, g telles que $\int_a^{+\infty} f + g$ converge, sans que $\int_a^{+\infty} f$, ni $\int_a^{+\infty} g$ convergent. Trouvez un tel exemple !

6.9.6 Positivité

Proposition 57 (Positivité de l'intégrale) Soient $f, g : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions continues, ayant une intégrale convergente.

$$\text{Si } f \leq g \quad \text{alors} \quad \int_a^{+\infty} f(t) dt \leq \int_a^{+\infty} g(t) dt.$$

En particulier, l'intégrale (convergente) d'une fonction positive est positive : Si $f \geq 0$ alors $\int_a^{+\infty} f(t) dt \geq 0$.

Une nouvelle fois, les mêmes relations sont valables pour les fonctions définies sur un intervalle $]a, b]$, non bornées en a , en prenant bien soin d'avoir $a < b$.

Remarque 7 Si l'on ne souhaite pas distinguer les deux types d'intégrales impropres sur un intervalle $[a, +\infty[$ (ou $] -\infty, b]$) d'une part et $]a, b]$ (ou $[a, b[$) d'autre part, alors il est pratique de rajouter les deux extrémités à la droite numérique :

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

Ainsi l'intervalle $I = [a, b[$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \overline{\mathbb{R}}$ désigne l'intervalle infini $[a, +\infty[$ (si $b = +\infty$) ou l'intervalle fini $[a, b[$ (si $b < +\infty$). De même pour un intervalle $I' =]a, b]$ avec $a = -\infty$ ou $a \in \mathbb{R}$.

6.9.7 Cas de deux points incertains

On peut considérer les intégrales doublement impropres, c'est-à-dire lorsque les deux extrémités de l'intervalle de définition sont des points incertains. Il s'agit juste de se ramener à deux intégrales ayant chacune un seul point incertain.

Définition 48 Soient $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ avec $a < b$. Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ converge s'il existe $c \in]a, b[$ tel que les deux intégrales impropres $\int_a^c f(t) dt$ et $\int_c^b f(t) dt$ convergent. La valeur de cette intégrale doublement impropre est alors

$$\int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt.$$

Les relations de Chasles impliquent que la nature et la valeur de cette intégrale doublement impropre ne dépendent pas du choix de c , avec $a < c < b$.

Attention ! Si une des deux intégrales $\int_a^c f(t) dt$ ou bien $\int_c^b f(t) dt$ diverge, alors $\int_a^b f(t) dt$ diverge. Prenons l'exemple de $\int_{-x}^{+x} t dt$ qui vaut toujours 0, pourtant $\int_{-\infty}^{+\infty} t dt$ diverge ! En effet, quel que soit $c \in \mathbb{R}$, $\int_c^{+x} t dt = \frac{x^2}{2} - \frac{c^2}{2}$ tend vers $+\infty$ (lorsque $x \rightarrow +\infty$).

Exemple 48 Est-ce que l'intégrale suivante converge ?

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t dt}{(1+t^2)^2}$$

On choisit (au hasard) $c = 2$. Il s'agit de savoir si les deux intégrales

$$\int_{-\infty}^2 \frac{t dt}{(1+t^2)^2} \quad \text{et} \quad \int_2^{+\infty} \frac{t dt}{(1+t^2)^2}$$

convergent.

En notant qu'une primitive de $\frac{t}{(1+t^2)^2}$ est $-\frac{1}{2} \frac{1}{1+t^2}$, on obtient :

$$\int_x^2 \frac{t dt}{(1+t^2)^2} = -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{1+t^2} \right]_x^2 = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{1+x^2} \right) \rightarrow -\frac{1}{10} \quad \text{lorsque } x \rightarrow -\infty.$$

Donc $\int_{-\infty}^2 \frac{t dt}{(1+t^2)^2}$ converge et vaut $-\frac{1}{10}$.

De même

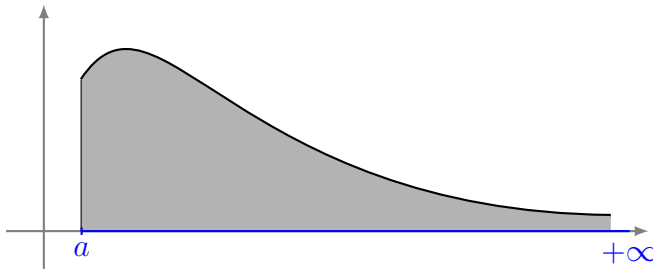
$$\int_2^x \frac{t dt}{(1+t^2)^2} = -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{1+t^2} \right]_2^x = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{5} \right) \rightarrow +\frac{1}{10} \quad \text{lorsque } x \rightarrow +\infty.$$

Donc $\int_2^{+\infty} \frac{t dt}{(1+t^2)^2}$ converge et vaut $+\frac{1}{10}$.

Ainsi $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t dt}{(1+t^2)^2}$ converge et vaut $-\frac{1}{10} + \frac{1}{10} = 0$. Ce n'est pas surprenant car la fonction est une fonction impaire. Refaites les calculs pour une autre valeur de c et vérifiez que l'on obtient le même résultat.

6.10 Fonctions positives

Nous considérons ici $\int_a^{+\infty} f(t) dt$, où f est de signe constant au voisinage de $+\infty$. Quitte à réduire l'intervalle d'intégration, et à changer éventuellement le signe de f s'il est négatif, nous supposons que la fonction est positive ou nulle sur l'intervalle d'intégration $[a, +\infty[$.



Rappelons que, par définition,

$$\int_a^{+\infty} f(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t) dt .$$

Observons que si la fonction f est positive, alors la primitive $\int_a^x f(t) dt$ est une fonction croissante de x (car sa dérivée est $f(x)$). Quand x tend vers l'infini, ou bien $\int_a^x f(t) dt$ est bornée, et l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge, ou bien $\int_a^x f(t) dt$ tend vers $+\infty$.

6.10.1 Théorème de comparaison

Si on ne peut pas (ou si on ne veut pas) calculer une primitive de f , on étudie la convergence en comparant avec des intégrales dont la convergence est connue, grâce au théorème suivant.

Théorème 26 Soient f et g deux fonctions positives et continues sur $[a, +\infty[$. Supposons que f soit majorée par g au voisinage de $+\infty$:

$$\exists A \geq a \quad \forall t > A \quad f(t) \leq g(t) .$$

1. Si $\int_a^{+\infty} g(t) dt$ converge alors $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge.
2. Si $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ diverge alors $\int_a^{+\infty} g(t) dt$ diverge.

Exemple 49 Montrons que l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} t^\alpha e^{-t} dt \quad \text{converge,}$$

quel que soit le réel α .

- Pour cela nous écrivons d'abord : $t^\alpha e^{-t} = t^\alpha e^{-t/2} e^{-t/2}$.
- On sait que $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha e^{-t/2} = 0$, pour tout α , car l'exponentielle l'emporte sur les puissances de t .
- En particulier, il existe un réel $A > 0$ tel que :

$$\forall t > A \quad t^\alpha e^{-t/2} \leq 1 .$$

- En multipliant les deux membres de l'inégalité par $e^{-t/2}$ on obtient :

$$\forall t > A \quad t^\alpha e^{-t} \leq e^{-t/2} .$$

- Or l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-t/2} dt$ converge. En effet :

$$\int_1^x e^{-t/2} dt = [-2e^{-t/2}]_1^x = 2e^{-1/2} - 2e^{-x/2} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} 2e^{-1/2} - 2e^{-x/2} = 2e^{-1/2} .$$

- On peut donc appliquer le théorème 26 de comparaison : puisque $\int_1^{+\infty} e^{-t/2} dt$ converge, on en déduit que $\int_1^{+\infty} t^\alpha e^{-t} dt$ converge aussi.

6.10.2 Théorème des équivalents

Grâce au théorème 26 de comparaison, on peut remplacer la fonction à intégrer par un équivalent au voisinage de $+\infty$ pour étudier la convergence d'une intégrale.

Théorème 27 (Théorème des équivalents) Soient f et g deux fonctions continues et strictement positives sur $[a, +\infty[$. Supposons qu'elles soient équivalentes au voisinage de $+\infty$, c'est-à-dire :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(t)}{g(t)} = 1 .$$

Alors l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge si et seulement si $\int_a^{+\infty} g(t) dt$ converge.

Attention : il est important que f et g soient positives !

On notera le fait que f et g sont équivalentes au voisinage de $+\infty$ par :
 $f(t) \underset{+\infty}{\sim} g(t)$.

Exemple 50 *Est-ce que l'intégrale*

$$\int_1^{+\infty} \frac{t^5 + 3t + 1}{t^3 + 4} e^{-t} dt \quad \text{converge ?}$$

Comme

$$\frac{t^5 + 3t + 1}{t^3 + 4} e^{-t} \underset{+\infty}{\sim} t^2 e^{-t},$$

et que nous avons déjà montré que l'intégrale $\int_1^{+\infty} t^2 e^{-t} dt$ converge, alors notre intégrale converge.

6.10.3 Intégrales de Riemann

Pour l'étude de la convergence d'une intégrale pour laquelle on n'a pas de primitive, l'utilisation des équivalents permet de se ramener à un catalogue d'intégrales dont la nature est connue. Les plus classiques sont les intégrales de Riemann et de Bertrand.

Une intégrale de Riemann est :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$$

où $\alpha > 0$.

Dans ce cas, la primitive est explicite :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{-\alpha+1} \frac{1}{t^{\alpha-1}} \right]_1^x & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\ln t \right]_1^x & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

On en déduit immédiatement la nature (convergente ou divergente) des intégrales de Riemann.

$$\text{Si } \alpha > 1 \quad \text{alors} \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt \quad \text{converge.}$$

$$\text{Si } \alpha \leq 1 \quad \text{alors} \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt \quad \text{diverge.}$$

6.10.4 Intégrales de Bertrand

Une intégrale de Bertrand est

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t (\ln t)^\beta} dt$$

où $\beta \in \mathbb{R}$.

La primitive est explicite :

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t (\ln t)^\beta} dt = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{-\beta+1} (\ln t)^{-\beta+1} \right]_2^x & \text{si } \beta \neq 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\ln(\ln t) \right]_2^x & \text{si } \beta = 1 \end{cases}$$

On en déduit la nature des intégrales de Bertrand.

$$\text{Si } \beta > 1 \quad \text{alors} \quad \int_2^{+\infty} \frac{1}{t (\ln t)^\beta} dt \quad \text{converge.}$$

$$\text{Si } \beta \leq 1 \quad \text{alors} \quad \int_2^{+\infty} \frac{1}{t (\ln t)^\beta} dt \quad \text{diverge.}$$

6.10.5 Application

Voici un exemple d'application :

Exemple 51 Est-ce que l'intégrale

$$\int_2^{+\infty} \sqrt{t^2 + 3t} \ln \left(\cos \frac{1}{t} \right) \sin^2 \left(\frac{1}{\ln t} \right) dt \quad \text{converge ?}$$

Le point incertain est $+\infty$. Pour répondre à la question, calculons un équivalent de la fonction au voisinage de $+\infty$. On a :

$$\begin{aligned} \sqrt{t^2 + 3t} &= t \sqrt{1 + \frac{3}{t}} \underset{+\infty}{\sim} t \\ \ln \left(\cos \frac{1}{t} \right) &= \ln \left(1 - \frac{1}{2t^2} + o \left(\frac{1}{t^2} \right) \right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2t^2} \\ \sin^2 \left(\frac{1}{\ln t} \right) &\underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{1}{\ln t} \right)^2 \end{aligned}$$

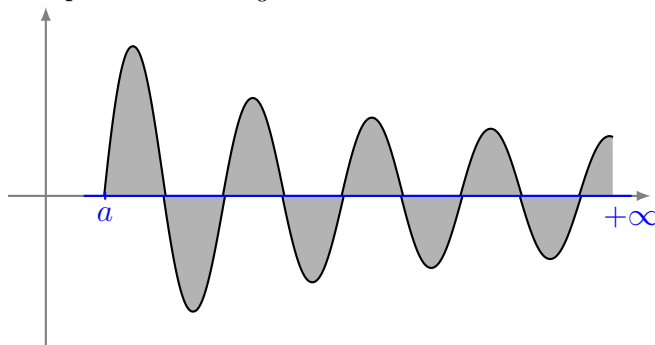
D'où un équivalent de la fonction au voisinage de $+\infty$:

$$\sqrt{t^2 + 3t} \ln \left(\cos \frac{1}{t} \right) \sin^2 \left(\frac{1}{\ln t} \right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2t (\ln t)^2}$$

Remarquons que dans cette équivalence les deux fonctions sont négatives au voisinage de $+\infty$. D'après le théorème 27, les deux intégrales associées sont de même nature. Mais comme l'intégrale de Bertrand $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t (\ln t)^2} dt$ converge, alors notre intégrale initiale est aussi convergente.

6.11 Fonctions oscillantes

Nous considérons ici $\int_a^{+\infty} f(t) dt$, où $f(t)$ oscille jusqu'à l'infini entre des valeurs positives et négatives.



La définition de l'intégrale impropre reste la même :

$$\int_a^{+\infty} f(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t) dt .$$

Contrairement au cas des fonctions positives, où la limite était soit finie, soit égale à $+\infty$, tous les comportements sont possibles ici : les valeurs de $\int_a^x f(t) dt$ peuvent tendre vers une limite finie, vers $+\infty$ ou $-\infty$, ou bien encore osciller entre deux valeurs finies (comme $\int_a^x \sin t dt$), ou s'approcher alternativement de $+\infty$ et $-\infty$ (comme $\int_a^x t \sin t dt$).

6.11.1 Intégrale absolument convergente

Le cas le plus favorable est celui où la valeur absolue de f converge.

Définition 49 Soit f une fonction continue sur $[a, +\infty[$. On dit que $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ est absolument convergente si $\int_a^{+\infty} |f(t)| dt$ converge.

Le théorème suivant est souvent utilisé pour démontrer la convergence d'une intégrale. Malheureusement, il ne permet pas de calculer la valeur de cette intégrale.

Théorème 28 Si l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ est absolument convergente, alors elle est convergente.

Autrement dit, être absolument convergent est plus fort qu'être convergent.

Preuve 11 C'est une conséquence du critère de Cauchy (théorème ??) appliqué à $|f|$, puis à f .

Comme $\int_a^{+\infty} |f(t)| dt$ converge alors par le critère de Cauchy (sens direct) :

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists M \geq a \quad \left(u, v \geq M \implies \int_u^v |f(t)| dt < \epsilon \right).$$

Mais comme

$$\left| \int_u^v f(t) dt \right| \leq \int_u^v |f(t)| dt < \epsilon$$

alors par le critère de Cauchy (sens réciproque), $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge.

Exemple 52 Par exemple,

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2} dt \quad \text{est absolument convergente,}$$

donc convergente. En effet, pour tout t ,

$$\frac{|\sin t|}{t^2} \leq \frac{1}{t^2}.$$

Or l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ est convergente. D'où le résultat par le théorème 26 de comparaison.

6.11.2 Intégrale semi-convergente

Définition 50 Une intégrale $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ est semi-convergente si elle est convergente mais pas absolument convergente.

Exemple 53

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt \quad \text{est semi-convergente.}$$

Nous allons prouver qu'elle est convergente, mais pas absolument convergente.

1. **L'intégrale est convergente.**

Pour le montrer, effectuons une intégration par parties (avec $u' = \sin t$, $v = \frac{1}{t}$) :

$$\int_1^x \frac{\sin t}{t} dt = \left[\frac{-\cos t}{t} \right]_1^x - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2} dt .$$

Examinons les deux termes :

— $\left[\frac{-\cos t}{t} \right]_1^x = -\frac{\cos x}{x} + \cos 1$. Or la fonction $\frac{\cos x}{x}$ tend vers 0 (lorsque $x \rightarrow +\infty$), car $\cos x$ est bornée et $\frac{1}{x}$ tend vers 0. Donc $\left[\frac{-\cos t}{t} \right]_1^x$ admet une limite finie (qui est $\cos 1$).

— Pour l'autre terme, notons d'abord que $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt$ est une intégrale absolument convergente. En effet $\frac{|\cos t|}{t^2} \leq \frac{1}{t^2}$ et l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge.

Par conséquent, $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt$ converge, ce qui signifie exactement que $\int_1^x \frac{\cos t}{t^2} dt$ admet une limite finie.

Conclusion : $\int_1^x \frac{\sin t}{t} dt$ admet une limite finie (lorsque $x \rightarrow +\infty$), et donc par définition $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ converge.

2. **L'intégrale n'est pas absolument convergente.**

Voici un moyen de le vérifier. Comme $|\sin t| \leq 1$ pour tout t , on a :

$$\frac{|\sin t|}{t} \geq \frac{\sin^2 t}{t} = \frac{1 - \cos(2t)}{2t} .$$

En appliquant une intégration par parties à $\frac{\cos(2t)}{t}$ (avec $u' = \cos(2t)$ et $v = \frac{1}{t}$), on obtient :

$$\int_1^x \frac{1 - \cos(2t)}{2t} dt = \frac{1}{2} \left[\ln t \right]_1^x - \frac{1}{4} \left[\frac{\sin(2t)}{t} \right]_1^x - \frac{1}{4} \int_1^x \frac{\sin(2t)}{t^2} dt .$$

Or $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(2t)}{t^2} dt$ converge absolument. Des trois termes de la somme ci-dessus, les deux derniers convergent, et le premier tend vers $+\infty$. Donc l'intégrale diverge, et par le théorème 26 de comparaison, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t} dt$ diverge également.

6.11.3 Théorème d'Abel

Pour montrer qu'une intégrale converge, quand elle n'est pas absolument convergente, on dispose du théorème suivant.

Théorème 29 (Théorème d'Abel) Soit f une fonction \mathcal{C}^1 sur $[a, +\infty[$, positive, décroissante, ayant une limite nulle en $+\infty$. Soit g une fonction continue sur $[a, +\infty[$, telle que la primitive $\int_a^x g(t) dt$ soit bornée. Alors l'intégrale

$$\int_a^{+\infty} f(t) g(t) dt \quad \text{converge.}$$

Exemple 54 Avec $f(t) = \frac{1}{t}$ et $g(t) = \sin t$, on retrouve que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ converge.

Preuve 12 C'est une généralisation de l'exemple 53 précédent. Pour tout $x \geq a$, posons $G(x) = \int_a^x g(t) dt$. Par hypothèse, G est bornée, donc il existe M tel que, pour tout x , $|G(x)| \leq M$. Effectuons maintenant une intégration par parties :

$$\int_a^x f(t) g(t) dt = \left[f(t) G(t) \right]_a^x - \int_a^x f'(t) G(t) dt .$$

Comme G est bornée et f tend vers 0, le terme entre crochets converge. Montrons maintenant que le second terme converge aussi, en vérifiant que

$$\int_a^{+\infty} f'(t) G(t) dt \quad \text{est absolument convergente.}$$

On a :

$$|f'(t) G(t)| = |f'(t)| |G(t)| \leq (-f'(t)) M ,$$

car f est décroissante (donc $f'(t) \leq 0$) et $|G|$ est bornée par M . Par le théorème 26 de comparaison, il suffit donc de montrer que $\int_a^{+\infty} -f'(t) dt$ est convergente. Or :

$$\int_a^x -f'(t) dt = f(a) - f(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(a) - f(x)) = f(a) .$$

